(壹) 填充題: 將答案寫在答案卷上, 請標明題號及格號, 並依序作答。 每題 6 分; 有兩格者, 每格 3 分, 計 60 分。

(1) 極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{x(1-\cos x)\tan(\sin x)}=$ ___(1)___ 。

(2) 令 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$。 討論以下兩極限是否存在; 若存在, 則求其值:

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$, 答 : ___(2a)___ 。

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, 答: ___(2b)___ 。

(3) 若 $g(x)$ 爲 $f(x)=x^3+3x+1$ 的反函數, 則 $g'(15)=$ ___(3a)___ , $g''(15)=$ ___(3b)___ 。

(4) 函數 $f(x)=\frac{4x^2+5x+1}{4x^3+4x^2+x}$ 的 n-階導函數爲 ___(4)___ 。

(5) 積分 $\int_a^b(x^4-10x^2+9)\,dx$ 在 $a=$ ___(5a)___ , $b=$ ___(5b)___ 時, 其積分值最小。

(6) 積分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx=$ ___(6)___ 。

(7) 令 $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$, 則 $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=$ ___(7)___ 。

(8) 令 $z=f(x,y)$, 其中 $x=r^2+s^2$, $y=2rs$, 假設 $f(x,y)$ 的二階偏導函數均爲連續, 則 $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial s}=$ ___(8)___ 。

(9) 曲面 $z=xy$ 在柱面 $x^2+y^2=1$ 之內的曲面面積爲 ___(9)___ 。

(10) 參數曲線 $r=e^{-\theta}, \theta\geq 0$, 的形心爲 $(\overline{x},\overline{y})=($ ___(10a)___ , ___(10b)___ $)$。

(貳) 計算證明題: 必須有計算過程, 才予計分。共 5 題, 每題 8 分, 計 40 分。

(11) 考慮第一象限的點 $P(a,b)$。 若曲線 $y=x^3$ 有三條切線通過 P, 則 a,b 所滿足的充分必要條件爲何?

(12) 令 $f(x)$ 爲可微函數, P 爲不在 $y=f(x)$ 之圖形上的點。 若 Q 爲 $y=f(x)$ 上最靠近 P 的點, 證明: 線段 PQ 垂直於 $y=f(x)$ 的圖形。

(13) 求函數 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ 在 $x=0$ 的 Taylor 級數及其收斂半徑。

(14) 令曲線 C 爲 $(x^2+y^2-x)^2=x^2+y^2$, 求此曲線所圍區域的面積。

(15) 令 R 爲三條直線 $2x+3y-7=0$, $x-2y+4=0$ 及 $x+5y-10=0$ 所圍的區域, 求 $\iint_R(2x+3y-6)\sin(x-2y+4)\,dA$。

試題隨卷繳回