

※ 注意：請於答案卷上依序作答，並應註明作答之大題及其題號。

(壹) 填充題：請標明題號及格號，並依序作答。共 6 題，每題 10 分，計 60 分。(一題兩格者，每格 5 分)

(1) 令函數  $y = \cos x$  之圖形與三直線  $x = -a, x = 0, x = a$  ( $0 < a < \pi$ ) 的交點分別為  $A, B, C$ ， $P$  為三角形  $ABC$  之外心 (外接圓圓心)， $Q$  為三角形  $ABC$  之內心 (內切圓圓心)。當  $a \rightarrow 0^+$  時，點  $P$  的極限位置座標為 (1a)； $Q$  的極限位置座標為 (1b)。

(2) 令  $n$  為任意正整數。當  $a =$  (2a) 時，曲線  $y = ax^n$  與  $y = \ln x$  相切，且此時切點為 (2b)。

(3) 假設台北 101 大樓在高度 250 公尺處有一探照燈，在大樓前方 100 公尺處，有一架直升機在高度 190 公尺的空中投下一物體。物體自由落下，物體在地面的影子隨之移動，則在落下 (3a) 秒時，影子移動速率最快，此時速率為 (3b)。(以  $g = 10 \text{ m}^2/\text{sec}$  計算之。)

(4) 若函數  $f(x)$  滿足方程式  $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$ ，則  $f(x)$  可具體表成 (4)。

(5) 若  $n$  為正整數， $a, b \neq 0$ ，則積分  $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^2} =$  (5)。

(6) 極座標曲線  $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$  的全長為 (6)。

(貳) 計算題：必須有計算過程，才予以計分。共 4 題，每題 10 分，計 40 分。

(7) 求極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^{-1} x - \frac{2}{3}x^3}{e^{x^2} \sin x - x - \frac{5}{6}x^3}$$

之值。

(8) 令  $E$  為包含直線  $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1, \end{cases} t \in \mathbb{R}$  及點  $(1, 0, 0)$  的平面， $E$  上有一以

$(0, -1, 1)$  為圓心、半徑為 1 之圓  $C$ 。試問點  $P(0, 0, -3)$  到圓  $C$  上那一點的距離最長？到圓  $C$  上那一點的距離最短？

(9) 空間曲面  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$  圍成一區域，試求該區域之體積。

(10) (a) 若向量場  $\mathbf{F} = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + (\frac{x^2}{z} + y^3) \mathbf{k}$  為保守場 (conservative)，則實數  $A, B$  分別為何？

(b) 令  $C$  為由  $(1, 1, 1)$  到  $(2, 2, 1)$  的線段，試求線積分

$$\int_C 2x \ln z dx + 2y^2 z dy + (\frac{x^2}{z} + y^3) dz$$

之值。