

不得使用計算機

請依照題號順序作答。所有數字必須化為最簡分數，未依規定者該題不予計分。除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫。試題共三大題，第一大題為單選題，每題各佔5%。第二大題為多選題，每題各佔10%。第三大題為計算題，每題各佔15%。

一、單選題(占40分)

(說明：第1題至第8題，每題5個選項，其中只有一個是最適當的答案，請作答於答案卷首頁之選擇題作答區，答案選項為大寫之(A)~(E)5個選項。各題答對得5分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。)

1. 已知  $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$ ， $dy/dx$  等於下列哪一個選項？

(A)  $-\frac{3x+y}{y^2}$  (B)  $-\frac{3x+y}{x+y}$  (C)  $\frac{1-3x-y}{x+y}$  (D)  $-\frac{3x}{1+y}$  (E)  $-\frac{3x}{x+y}$ 。

2. 下述五個選項中，那個選項中的  $x$  取值，使得級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{x^n}$  收斂？

(A) 除了  $x=0$  之外 (B)  $x=3$  (C)  $-3 \leq x \leq 3$  (D)  $|x| > 3$ 。  
(E) 對所有的  $x$ ，該級數都發散。

3. 已知  $df(x)/dx = g(x)$  且  $h(x) = x^3$ ，則  $\frac{d}{dx}f(h(x))$  等於下列哪一個選項？

(A)  $g(x^3)$  (B)  $3x^2g(x)$  (C)  $g'(x)$  (D)  $3x^2g(x^3)$  (E)  $x^3g(x^3)$ 。

4. 就下述之極限而言，哪一個選項正確？

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{h}$$

(A) 極限為 1 (B) 極限為 2 (C) 極限為 0 (D) 極限為 -1 (E) 極限不存在。

5. 若對所有的實數  $x$ ， $F'(x)$  皆為連續函數，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h^2} F'(x) dx$  等於下列哪一個選項？

(A) 0 (B)  $F(0)$  (C)  $F(3)$  (D)  $F'(0)$  (E)  $F'(3)$ 。

6. Note that  $z = f(x, y)$  where  $f$  is differentiable,  $x = g(t)$ , and  $y = h(t)$ . It is known that  $g(3) = 2$ ,  $g'(3) = 5$ ,  $h(3) = 7$ ,  $h'(3) = -4$ ,  $f_x(2, 7) = 6$ , and  $f_y(2, 7) = -8$ . Determine the value of  $dz/dt$  at  $t = 3$ .

(A) 62 (B) 30 (C) 32 (D) -2 (E) 1。

7. Let  $g$  be the function given by  $g(x) = \int_1^x 100(t^2 - 3t + 2) \exp(-t^2) dt$ . Which of the following statements about  $g$  must be true?

I.  $g$  is increasing on the interval  $(1, 2)$ .

II.  $g$  is increasing on the interval  $(2, 3)$ .

III.  $g(3) > 0$

(A) I only (B) II only (C) III only (D) II and III only (E) I, II, and III。

8. If  $dy/dx = y \sec^2 x$  and  $y = 5$  when  $x = 0$ , then  $y =$

(A)  $e^{\tan x} + 4$  (B)  $e^{\tan x} + 5$  (C)  $5e^{\tan x}$  (D)  $\tan x + 5$  (E)  $\tan x + 5e^x$ 。

## 二、多選題 (占 30 分)

(說明: 每題 10 分, 第 9 題至第 11 題, 每題有 5 個選項, 其中至少有一個是正確的選項, 請作答於答案卷首頁之選擇題作答區, 答案選項為大寫之 (A) ~ (E) 5 個選項。各題之選項獨立判定, 所有選項均答對者, 得 10 分; 每答錯 1 個選項, 扣 3 分; 所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者, 該題以零分計算。)

9. 當  $z = f(x, y)$ , 且  $x = r \cos \theta$  及  $y = r \sin \theta$ 。請問下列哪些選項是正確的?

(A)  $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta$

(B)  $\frac{\partial z}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y})$

(C)  $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta$

(D)  $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta$  (E)  $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin \theta$

10. 令  $I$  代表下列積分

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

請問下列哪些選項是正確的?

(A)  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr d\theta$

(B)  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 dr d\theta$

(C)  $I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA$ , 其中  $\Omega$  為以  $(1, 0)$  為圓心, 半徑為 1 的圓盤

(D)  $I = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$

(E)  $I \leq 4\pi$

11. Let  $A$  be the region bounded above by the graph of  $y = \sin(\pi x)$  and below by the graph of  $y = x^3 - 4x$ .

(A)  $(2.1, 0.8)$  falls into the region  $A$ .

(B) The area of  $A$  can be represented by  $\int_0^2 [\sin(\pi x) - (x^3 - 4x)] dx$ .

(C) The area of  $A$  is equal to 4.

(D) The region  $A$  is the base of a solid. For this solid, each cross section perpendicular to the  $x$ -axis is a square. The volume of this solid is equal to  $\int_0^2 [\sin(\pi x) - (x^3 - 4x)]^2 dx$ .

(E) The region  $A$  models the surface of a small pond. At all points in  $A$  at a distance  $x$  from the  $y$ -axis, the depth of the water is given by  $h(x) = 3 - x$ . The volume of water in the pond is equal to  $\int_0^2 (3 - x) [\sin(\pi x) - (x^3 - 4x)] dx$ .

## 三、計算題 (佔 30 分)

(說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(12, 13)與子題號((a)、(b))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。各小題配分標於題末。)

12. (15分) Let  $f(x, y, z) = xyz$ . Find the maximum and minimum values of  $f$  subject to the constraint  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

(a) Use Lagrange multiplier to obtain the system of equations to be solved. (7分)

(b) Find the maximum and minimum values of  $f$ . (8分)

13. (15分)

$$I(r) = \int \int_{\Omega_r} \exp [-(x^2 + 2xy + 3y^2)] dA$$

where  $\Omega_r = \{(x, y) | x^2 + 2xy + 3y^2 \leq r^2\}$ .

(a) Evaluate  $I(1)$ . (10分)

(b) Find  $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r)$ . (5分)

試題隨卷繳回