

一．填充題 (共 9 格, 每格 8 分, 請標明題號, 依序將答案寫在答案卷上)

1. 設 $f(x) = \sqrt{x} + 2$. 若直線 L 為曲線 $y = f(x)$ 過 $(c, f(c))$ 的切線且通過 $(8, 5)$, 則 $c =$ _____ .

2. 設 $h(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2 - 2}{(t^2 + 1)^2} dt$. 則導數 $h'(1) =$ _____ .

3. $\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) dx =$ _____ .

4. 設 $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, z \geq 1\}$. 則 D 的體積為 _____ .

5. 設 K 為拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2$ 所圍成的區域. 若直線 $y = c$ 將此區域分割成面積相等的兩部分, 則 $c =$ _____ .

6. 設 $C: x^2 + (y - 3)^2 = 16$ 依逆時針旋轉.

則 $\oint_C 2y dx + (x^2 + y^2) dy =$ _____ .

7. 設 $f(x) = x^2 \ln(1 + 2x)$. 則第 9 階導數 $f^{(9)}(0) =$ _____ .

8. 設 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$. 則向量場 $\vec{F}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} + (2y + z^2) \vec{j} + (3z - 2xyz) \vec{k}$ 流出的 S 的通量 (flux) 為 _____ .

9. $\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x - 4}{e^x - 4} dx =$ _____ .

二．計算證明題 (注意：若無計算過程, 不予計分)

1. 設冪級數 (power series) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半徑為 δ , 且

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \quad \text{其中 } |x| < \delta. \quad (14\%)$$

(1) 試求 $f(x)$, $h(x)$ 之間的關係.

(2) 試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n}$ 之值.

2. 設曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 上點 (x, y, z) 的溫度為 $T(x, y, z) = 2xy + 4yz$. 試問最高溫度與最低溫度為何? 發生在何處? (14%)

試題必須隨卷繳回