

- 請於答案紙上依序回答以下所有問題，各題占分比重標示於[]內。
- 作答時請清楚標示題號，並且務必詳列解題過程。
- 請勿使用任何參考資料、計算工具。

1. 考慮線性系統
$$\begin{cases} x+y+z=k \\ 3x+4y+5z=3k \\ 4x+2y+(k+1)z=5k \end{cases}$$
，請依下列各條件來討論 k 的值：[10%]

(a) 此系統無解。[5%]

(b) 此系統有無限多解。[5%]

2. 給定 $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4yz + 4zx$ 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，請回答以下問題：[10%]

(a) 請求取 Q 的極大值和極小值。[5%]

(b) 請求取 Q 的極值發生時相對應的 (x,y,z) 。[5%]

3. 若我們欲以 $y = ax + b$ 描述資料點 (x,y) : $(-2,-3), (-1,-1), (0,1), (1,1), (2,3)$ ，請利用最小平方法估算係數 a 與 b 。[10%]

4. 給定函數 $f(x,y) = e^{xy} \cos(x+y)$ 及點 $P(x,y) = (0,\pi)$ ，請回答下列問題：[10%]

(a) 請計算 f 在 P 處的最大變化率。[5%]

(b) 請找出沿著什麼方向， f 在 P 處的變化率會是上述最大變化率的一半。[5%]

5. 考慮非齊次常微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = r(x)$ ，請回答下列問題：[15%]

(a) 若 $x^5 e^{-4x} (\sin 3x + \cos 3x)$ 是此方程式的一個解，請求取 $y(x)$ 的通解。[5%]

(b) 給定 $r(x) = 1 + x^2 + e^{-2x} + \sin x$ ，請求取 $y(x)$ 的通解。[10%]

6. 考慮初始值問題
$$\begin{cases} x' = 2x - y + t \\ y' = 3x - 2y - 1 \\ x(t=0) = y(t=0) = 0 \end{cases}$$
，請使用拉普拉斯轉換法回答下列問題：[15%]

(a) 請求取 $x(t)$ 與 $y(t)$ 分別轉換後的函數 $X(s)$ 、 $Y(s)$ 。[5%]

(b) 請求取 $x(t)$ 與 $y(t)$ 。[10%]

7. 若邊界值問題
$$\begin{cases} y'' + \alpha y = 0, & y = y(x), & 0 < x < L \\ y(0) = 0 \\ y'(L) + y(L) = 0 \end{cases}$$
 中的 α 可被視為一個特徵值，請求取所有可能的實數 α 。[10%]

8. 請求解以下的偏微分方程式問題：
$$\begin{cases} u_x + 2xu_y = 8xy \\ u(0,y) = \sin y \end{cases}$$
。[20%]

試題隨卷繳回