

- 請於考試答案紙上依序回答以下所有問題(佔分比重標示於[]內)，請清楚標示題號，並且務必詳列解題過程。
- 請勿使用任何參考資料、計算工具。

1. 給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，請回答以下問題：[30%]

- (a) 請計算 A^5 的行列式(determinant)。[5%]
 - (b) 請求取 A^5 的所有特徵值(eigenvalue)的和。[5%]
 - (c) 請利用高斯-喬丹消去法(Gauss-Jordan Elimination)求取 A 的逆矩陣(inverse matrix)。[10%]
 - (d) 若 $B = A^{-1}$ ，請求取 B^5 的所有特徵向量(eigenvector)。[10%]
2. 請回答下列向量微積分相關問題：[15%]
- (a) 給定曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ ，請求取在此曲面上一點 $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ 處的單位法線方向(unit normal vector)。[5%]
 - (b) 請計算向量函數 $\vec{F} = [-yz^3, xz^3, x^3y^3]$ 沿著曲線 $C: x^2 + y^2 = 1, z = 1$ 環繞一圈的積分。[10%]
3. 請回答下列常微分方程式(ordinary differential equation)相關問題：[30%]
- (a) 請求解 $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$ 。[15%]
 - (b) 請使用拉普拉斯轉換法(Laplace transform)求解 $xy'' - xy' + y = 1, y(x=0) = y'(x=0) = 1$ 。[15%]
4. 若函數 $u = u(x, t)$ 滿足偏微分方程式(partial differential equation) $u_{tt} = u_{xx}$ ，請回答下列相關問題：[25%]
- (a) 假設 $u(x, t)$ 滿足邊界條件 $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ，請求解 $u(x, t)$ 。[15%]
 - (b) 承(a)，若初始條件為 $u(x, 0) = f(x)$ 和 $u_t(x, 0) = g(x)$ ，請求取 $u(x, t)$ 的完整解。[10%]

試題隨卷繳回