

1. (25%) 有一 2×2 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，向量 $G = \begin{bmatrix} -3e^t \\ e^{3t} \end{bmatrix}$ 請問
- (a) 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalues) 及特徵向量 (eigenvectors) 為何？
- (b) 利用上述答案以及參數變異法 (variation of parameters)，請找出微分方程組 $x' = Ax + G$ 的一般解 (general solution)。

2. (30%) 請求解下列微分方程式
- (a) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}; y(0) = 1, y'(0) = 2$
- (b) $y' + \frac{4}{x}y = 2; y(1) = -4$
- (c) $1 + xy' = 0; y(e^4) = 3$

3. (20%) 海洋中黑潮向量流場可表示為 $F(t) = x_1(t)i + y_1(t)j + z_1(t)k$ 或 $G(t) = x_2(t)i + y_2(t)j + z_2(t)k$ 我們知道 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ 都是二階可微分，請證明
- (a) $(F \times G)' = F \times G' + F' \times G$
- (b) $(F \times F')' = F \times F''$

4. (25%) 海洋運動常以波動方式傳遞，可用以下波動方程式組描繪

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$y(x, 0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \infty < x < \infty$$

假設 $a=1$ ，起始條件 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ， $g(x) = 0$ ，請求解 $y(x, t)$ 為何？