

1. (25%) 請求解下列微分方程式

(a)  $y' = 3x^2 - \frac{y}{x}; y(1) = 5$

(b)  $x\cos(2y - x) - \sin(2y - x) - 2x\cos(2y - x)y' = 0; y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{8}$

2. (25%) 請說明何謂散度定理(Divergence theory)與史托克斯定理(Stokes' theorem)，而格林定理(Green's Theorem) 與上述兩定理有何關聯？

3. (25%) 慣性振盪是海洋中常見的現象，可用以下方程式組描述

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \frac{\partial v}{\partial t} = -u$$

$u, v$  分別為東西及南北方向速度，請將上述方程式寫成矩陣形式(matrix form)並求所伴隨的特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors)，並請利用合理的初始條件求解。

4. (a) (10%) 請證明  $y_1(x) = x^2$  以及  $y_2(x) = x - 1$  是下列微分方程式之解

$$(x^2 - 2x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0$$

- (b) (15%) 請利用(a)找出下列微分方程式之一般解 (general solution)

$$(x^2 - 2x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 6(x^2 - 2x)^2$$

試題隨卷繳回