

1. 請找出下列微分方程式的一般解 (general solution)

(a) (13%) $y' + \frac{1}{x}y = x^2 + 2$

(b) (12%) $xy' + y = y^2$

2. (25%) 有一線性系統 $X' = AX$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 請問 (a) 矩陣 A 的特徵向量(eigenvectors)為何? (b) 請找出 X 的一般解。

3. 向量 $F = \sinh(x)i + \cosh(xyz)j - (x+y+z)k$

(a) (13%) 請計算 $\nabla \cdot F$ 以及 $\nabla \times F$ 。

(b) (12%) 請計算 $\nabla \cdot (\nabla \times F)$ 並說明此式的意義。

4. (25%) 考慮下列波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

初始條件為

$$y(x, 0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), -\infty < x < \infty$$

假設初始速度 $g(x) = 0$, 初始狀態 $f(x) = e^{-|x|}$ 請問 $y(x, t)$ 為何?

試題隨卷繳回