

1. 考慮下列的邊界值問題(Boundary-Value Problem)：

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{9\lambda}{x} y = 0, \quad 1 < x < a, \quad y'(1) = 0, \quad y(a) = 0$$

- (1) 試寫出此邊界值問題的 Self-Adjoint Form。【計分：3 分】

- (2) 試求此邊界值問題的固有值(Eigenvalue)與固有函數(Eigenfunction)。【計分：10 分】

- (3) 試問此邊界值問題之固有函數可以滿足何種正交性關係式(Orthogonality Relation)?

【計分：2 分】

2. 試求  $\oint_C \left[ \frac{-y^3}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} + \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j} \right] \cdot d\mathbf{r} = ?$  其中  $C: x^2 + 4y^2 = 4$ 。【計分：15 分】

3. 試求解下列的偏微分方程式：【計分：20 分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi$$

4. 試求解  $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ ：【計分：10 分】

5. 試求解  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+3)^2}$  之 Inverse Laplace Transform：【計分：10 分】

6. 試求解微分方程式： $y'' + y' + 2y = \ln x$  【計分：10 分】

7. 試求解微分方程式： $(2x \cos x) \frac{dy}{dx} - xy \sin x + 2y \cos x = 0$  【計分：10 分】

8. 試求解微分方程式： $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$  【計分：10 分】

試題隨卷繳回