

1. (1) 已知 $f(x) = e^{ax}$ ， $-\pi < x < \pi$ ， $a \neq 0$ 。試求 $f(x)$ 的傅立葉級數(Fourier series)。【計分：10分】

(2) 若 $g(x) = \cosh ax$ ， $-\pi < x < \pi$ ， $a \neq 0$ 。利用(1)之結果，試求 $g(x)$ 的傅立葉級數。【計分：5分】

2. 試求解下列的偏微分方程式(wave equation)：【計分：20分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0$$

其中， b 與 v_0 為常數，且 $0 < b < 1$ 。

3. 已知向量場 $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + 5z \mathbf{k}$ ，試求此向量場 \mathbf{F} 經由曲面 $S_1 (z = x^2 + y^2)$ 與平面 $S_2 (z = 1)$ 所包圍之封閉曲面流出的總通量。【計分：15分】

4. 請對角化矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，並求出 A^{100} 。【計分：10分】

5. 求解微分方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$ ， $x_1(0) = 2$ ， $x_2(0) = -1$ 。【計分：10分】

6. 請以 Laplace transform 求解微分方程： $y'' + y = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - k\pi)$ ， $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 1$ 。

【計分：10分】

7. 求解微分方程： $4y'' - y = xe^{x/2}$ ， $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 0$ 。【計分：10分】

8. 求解微分方程： $x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$ 。【計分：10分】

試題隨卷繳回