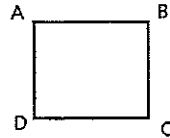


1. (共 15 分) 已知一病原體的可移動範圍如圖所示，每一小時後，該病原體會有 $1/2$ 的機率留在原區域，剩下 $1/2$ 的機率則隨機由可移動之方向前往其他區域，
- (1) (5 分) 請寫出轉移矩陣，
- (2) (10 分) 若已知第一小時結束時觀察到病原體在 A 區域，則請問第五小時結束時，該病原體在 A 區域與 C 區域之機率是多少？



2. (共 10 分) 已知 F 為一線性轉換(linear transformation)矩陣: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, F \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}, \text{ 請寫出 } F \text{ 及其秩(rank)與零空間(null space)。$$

3. (共 15 分) 請計算下列數值(需寫出完整過程)

(1) (5 分) $f(x) = g(x) - \frac{1}{g(x)}$, 若 $g(0) = 5$ 且 $g'(0) = 3$ 請問 $f'(0)$ 是多少?

(2) (5 分) $y = \sqrt{2-x^2}\sqrt{3-x^2}$, 請計算 $x=1$ 時 dy/dx 的數值。

(3) (5 分) $\int x^{\frac{-3}{4}}(x^{\frac{1}{4}} + 1)^{-2} dx$

4. (10 分) 若 $y = x \frac{dy}{dx} - x^2 \cos x$ 且 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 請寫出 y 並計算 $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 。

5. (共 25 分) 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 請求以下三小題 (均需寫出計算過程):

(1) (10 分) 請求出矩陣 A 的所有特徵值(eigenvalue)與相對應的特徵向量(eigenvector)。

(2) (10 分) 若矩陣 $A = UDV^T$, 其中 U 與 V 皆為正交矩陣(orthogonal matrix), V^T 為 V 的轉置矩陣(transpose matrix); D 為一對角線矩陣(diagonal matrix), 對角線元素皆為正數, 請求出 U 、 D 與 V 。

(附註: U 為正交矩陣意為 $UU^T = U^T U = I$, 其中 I 為單位矩陣)。

(3) (5 分) 請求出矩陣 A 的秩(rank)。

6. (10 分) 若 β 為一向量, 內含三個元素, 亦即 $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, 若函數 $f(\beta) = \sum_{i=1}^n \{y_i x_i^T \beta - \ln(1 + e^{x_i^T \beta})\}$, 其中 $x_i = \begin{bmatrix} x_{0,i} \\ x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{bmatrix}$, 請說明

如何以牛頓法(Newton-Raphson method)來求出使 $f(\beta)$ 達最大時的 β ?

(附註: $f(\beta)$ 中 x_i 、 y_i 、 n 皆為已知觀察值, \ln 為自然對數, e 為指數)。

見背面

題號： 404

國立臺灣大學 107 學年度碩士班招生考試試題

科目： 基礎數學(A)

題號： 404

節次： 7

共 2 頁之第 2 頁

7. (共 15 分) 請求出以下三小題的答案，每小題 5 分 (均需寫出計算過程)：

(1) 請求出 $y = x$ 、 $y = \frac{x}{27}$ 與 $y = \frac{1}{x^2}$ 三線所圍起區域的面積為_____。

(2) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(其中 \ln 為自然對數， e 為指數)。

(3) $\int_{-1}^1 (3-2x)e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

試題隨卷繳回