I. 計算題，每題 5 分 (共 40 分，請附上計算過程)

1. 若當$x = -3, 0$ 或 3 時，$f(x) > 0$, 其他時候則$f(x)=0$。已知$f(0)=0.8$，請問$E(x^2)$等於多少。
2. 已知隨機變數x的一階動差和二階動差值分別為 5 和 34，請解出機率$P(-2<x<12)$的下界。
3. 一聯合機率密度函數$f(x,y) = \frac{1}{8}(x+y), 0<x<2, 0<y<2$; 令$g(y)=2y$，請問 $E[(x - E(x|y))g(y)]$等於多少?
4. 一品牌冰箱正常運作的時候，其溫度變異數為 0.88，且溫度遵循常態分配。今天在生產線隨機抽樣 20 個冰箱，得到樣本變異數$\hat{s}^2 = 0.732$，請以 95%信賴水準，估算其信賴區間。(提示$\chi^2_{0.025,19}$=32.85, $\chi^2_{0.975,19}$=8.91)
5. 以下是古典迴歸模型$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i$的六個假設:
   a. 模型為參數的線性模型
   b. (x_i, y_i)為獨立的隨機抽樣樣本，i=1 到 N。
   c. $x_1 \dots x_k$無完全線性重和
   d. $E[u_i|x_1 \dots x_k] = 0$
   e. $Var[u_i|x_1 \dots x_k] = \sigma^2$
   f. $u_i|x_1 \dots x_k$遵循常態分配

   一研究者在迴歸估計模型中只加入一個解釋變數x_1，建立模型$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{u}_i$；然而母體模型應為$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i$，其中$x_{i2} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{i1} + v_i$，$cov(x_{i1}, v_i)=0$。若古典迴歸模型假設 a~c 成立，且$\hat{\beta}_1$為最小平方法的斜率估計值。請求解 $\text{plim}\,\hat{\beta}_1$。
6. 建立古典迴歸模型$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i$，$\hat{\beta}_1$為最小平方法的斜率估計值。請問我們需要古典迴歸模型的哪幾個假設成立，則$\hat{\beta}_1$存在唯一解。又我們需要古典迴歸模型的哪幾個假設成立，則$\hat{\beta}_1$為最佳線性不偏估計式。(2+3 分)
7. 請說明如何驗證古典迴歸假設的第六個假設: f. $u_i|x_1 \dots x_k$遵循常態分配。需簡述驗證步驟。
8. 已知母體迴歸線為$y_i = \alpha + \beta x_i^* + u_i$，$x_i^*$為無法觀察的變數。今以$x_i$當作$x_i^*$的代理變數，$x_i = x_i^* + e_i$。若$E(e_i) = 0$，$cov(x_i^*, e_i) = 0$，$\sigma_e^2$和$\sigma_{x^*}^2$分別為$e$和$x^*$的變異數；請求解 $\text{plim}\,\hat{\beta}$，並說明其一致性。

II. 是非題，每題 5 分(共 10 分，須說明理由，如敘述錯誤請更正)

1. 建立迴歸模型 $\log(y_i) = \alpha + \beta_1 \log(x_i) + \beta_2 \log(x_{i2}) + u_i$，則該模型違反古典迴歸模型的第一個假設: a. 模型為參數的線性模型
2. 當樣本數足夠大時，調整的判定係數一定會小於判定係數，且調整的判定係數可能出現負的數值。

III. 問答與演算題 (共 50 分)

1. 設$\{X_i\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Bernoulli (p_1)，令$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$，其中N為一幾何 Geo(p_2)隨機變數，N與X_i之間獨立，且N之可能值由“1”開始。
   (1) 計算Y之期望值$E(Y)$及變異數$Var(Y)$。(6 分)
   (2) 計算Y與N之相關係數$\rho_{Y,N}$，並說明其符號合理嗎? (10 分)
2. 令$\{X_i\}_1^m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Exp(λ_1)，$\{Y_j\}_1^n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Exp(λ_2)，且X_i's 與Y_j's 之間獨立，設m，n均很大，欲檢定 H_0: $\lambda_1=\lambda_2$，v.s. H_1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$，試推導一顯著水準近似為α之 GLR (Generalized Likelihood Ratio)檢定之拒絕域。 (10 分)
3. 令$\{X_i\}_1^n$表示一組抽自常態分配母體$N(\mu, \sigma^2)$之隨機樣本，其中參數μ與σ^2均未知。
   (1) 寫出(μ, σ^2)之參數空間，及其聯合充分統計量，記為(S_1, S_2)。(8 分)
   (2) 試計算μ與σ^2之最大概似函數估計元，記為$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}^2$。(8 分)
   (3) 試推導$\hat{\sigma}^2$之抽樣分配，並求σ^2之 100(1-α)%的信賴區間。(8 分)

試題隨卷繳回