

1. (25%) 已知一 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，請問 (a) 判別式 $\det A = |A|$? (b) 反

矩陣 $A^{-1} = ?$ (c) 特徵值 (eigenvalues)? (d) 特徵性量 (eigenvectors)?

2. 請推導下列向量關係式 (A, B 為向量)。

(a) (13%) $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$

(b) (12%) $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot B)A - (\nabla \cdot A)B$

3. (25%) 求解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 2\pi, t > 0$$

邊界與初始條件為

$$u(x, 0) = x(2\pi - x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(2\pi, t) = 0, t > 0$$

4. 常微分方程式 $y'' + 4y = x + 2e^{-2x}$

(a) (13%) 請找出它的均值解 (homogeneous solution)。

(b) (12%) 請找出它的一般解 (general solution)。