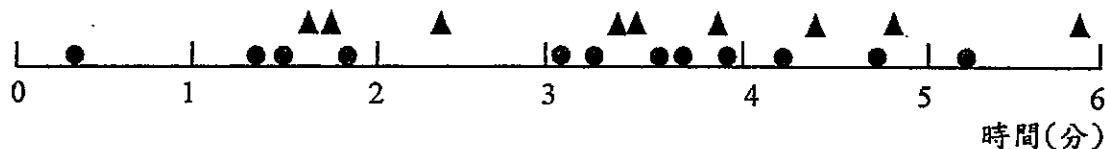


I. 統計個案分析 (共 50 分)

城都地區神奇寶貝中心調查皮卡丘臉頰靜電放電狀況。研究員小智、小剛與大木博士依據理論推論和實驗過程，欲逐步檢驗一些統計問題；並研究紀錄一對公、母皮卡丘 6 分鐘內的放電狀況。公皮卡丘放電時機以三角形紀錄在下圖中，公皮卡丘 6 分鐘內共放電 9 次。母皮卡丘放電時機以圓形紀錄，母皮卡丘 6 分鐘內共放電 12 次。皮卡丘每次放電皆為獨立事件。



請幫他們依序回答下列 10 個問題；各題請附上計算過程，每題 5 分。

- 過去研究曾指出公皮卡丘每分鐘放電機率為 0.8。而且當公皮卡丘放電時，母皮卡丘在同一分鐘內放電的機率為 0.8，而當公皮卡丘某一分鐘不放電時，母皮卡丘在同一分鐘內放電的機率為 0.6。請計算當母皮卡丘放電時，公皮卡丘在同一分鐘內也放電的機率。
- 研究皮卡丘的專家大木博士指出，皮卡丘基因理論告訴我們一對公、母皮卡丘放電機率如下。 Y =公皮卡丘每分鐘放電次數， X =母皮卡丘每分鐘放電次數 $E(Y|X) = -5 + 0.5X$ ， $E(X|Y) = Y^2$ 。 $E(X) = \mu_x$ ， $E(Y) = 0$ ， $\text{var}(X) = 4$ ， $\text{var}(Y) = \sigma_y^2$ ；請計算 μ_x 以及公、母皮卡丘放電頻率的理論共變異數 $\text{cov}(X, Y)$ 。(2+3 分)
- 承上題，請計算公、母皮卡丘放電頻率理論相關係數。
- 請畫出公、母皮卡丘每分鐘放電次數的時間趨勢圖(time trend)，並以時間趨勢圖描述公、母皮卡丘兩者放電頻率之間是否有關係。(4+1 分)
- 請計算公、母皮卡丘 6 分鐘內放電頻率的相關係數。相關係數是否和你前一題結論一致呢？
- 研究員相信公皮卡丘和母皮卡丘放電時機有關，欲以迴歸分析研究之。小智假設皮卡丘放電頻率為常態分配，且設立迴歸模型 $Y = a + bX + e$ ， Y =公皮卡丘每分鐘放電次數， X =母皮卡丘每分鐘放電次數， e 為迴歸殘差。請用最小平方方法計算 \hat{b} 和 $\text{var}(\hat{b})$ 。(2+3 分)
- 請說明 \hat{b} 標準差，記為 $\text{SD}(\hat{b})$ 的不偏性(unbiasness)是否成立，並敘述理由。
- 承上題，如果已知第 7 分鐘母皮卡丘放電次數為 6 次，請計算第 7 分鐘公皮卡丘預估放電次數的變異數。
- 另一名研究員小剛則相信公皮卡丘和母皮卡丘放電頻率並不屬於常態分配，且小剛相信放電發生之間距為指數隨機型態。請幫小剛判斷皮卡丘每分鐘放電次數應該屬於何種分配？
- 小剛聽從你的建議之後，也用迴歸分析分析之，並用你建議的分配由最大概似法估計迴歸估參數。請寫下該正確的概似函數。(提示：以 log-linear 配適條件期望值，令 $E(Y|X) = \exp(a + bX)$)。

II. 問答與計算題 (共 50 分) 每小題 5 分

- 令 $\{X_i\}_1^5$ 為來自均勻分配 $U(0, 1)$ 之隨機樣本，令 Y_i 表第 i ($1 \leq i \leq 5$) 階小之順序統計量，
 - 試求 $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$ 之聯合 pdf， Y_i 's 之間獨立嗎？
 - 分別計算 Y_1 與 Y_5 之邊際 pdf，並分別認出分配名稱與參數。
 - 令全距 $R = Y_5 - Y_1$ ，
 - 試計算 R 之 pdf，並認出分配名稱與參數。
 - 計算 R 之期望值 $E(R)$ ，及變異數 $\text{Var}(R)$ 。

2. 令 X_n 為二項分配 $X \sim B(n, p)$
- (1) 試計算 X_n 之階乘動差母函數，並計算 X_n 之第三次階乘動差。
 - (2) 試說明如何由(1)中所得之階乘動差母函數換算為 X_n 之機率質點函數(pmf)。
 - (3) 證明 X_n/n 機率收斂至 p (converge in probability)。
3. 令 $\{X_i\}_1^m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_1^2)$ ， $\{Y_j\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 為兩組抽自常態母體之隨機樣本， X_i 與 Y_j 之間獨立，參數 $\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知。
- (1) 試寫出各參數之參數空間，並以最大概似法(MLE)，求 $\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 之 MLE 估計元，記為 $\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ 。
 - (2) 求一常數 c ，使 $c\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$ 之分配為 F 分配(需註明自由度)。
 - (3) 由(2)之結果，
 - (i) 請導出參數 σ_1^2/σ_2^2 之 $100(1-\alpha)\%$ 的信賴區間。
 - (ii) 由此區間可作 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 之檢定嗎? 需述理由。
 - (4) 若樣本數 $m > 30$ ，且 $m \rightarrow \infty$ ，則 $\hat{\sigma}_1^2$ 是否為 σ_1^2 之均方差一致性估計元(mean square consistency)? 是否為簡單一致估計元(simple consistency)? 需推導結果。

試題隨卷繳回