

請寫出詳細計算過程

1. 請利用列運算(row operation), 解方程組

$$x + y + z = 6, x - y - z = 2, 3x + 2y + z = 4. \quad (10\%)$$

2. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) 試求矩陣 A 的特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors). (10%)

(b) 請利用(a)之結果, 求 A^{20} . (10%)

3. 給一向量場 $\vec{F} = \frac{1}{\rho^3} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 試求 $\text{curl} \vec{F}$. (10%)

4. 設 $S = \{y \mid y''' - 3y'' + 2y' = 0\}$ 即微分方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ 所有解所成的集合.

(a) 試證 S 為一佈於實數 \mathbb{R} 的向量空間(vector space). (6%)

(b) 請說明 $\{1, e^t, e^{2t}\}$ 為線性獨立(linearly independent) 且 S 中任意一元素

$$y \text{ 都可用 } 1, e^t, e^{2t} \text{ 來表示, 即 } y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, c_1, c_2, c_3 \text{ 為實數. (14\%)}$$

5. 試解下列一階微分方程.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2 + y \sin x}{2xy + \cos x - y}$, $y(0) = 2$ (10%)

(b) $xy' - y = x^2 \sin x$, $y(\pi) = -\pi$ (10%)

6. 請利用分離變數(separation of variables) 方法解下列問題. (20%)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

試題隨卷繳回