

※ 注意：請於試卷內之「非選擇題作答區」標明題號依序作答。

1. [20分，共2小題]

$$\text{令 } Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

而 X_1^T 是 X_1 的轉置矩陣， X_2^T 是 X_2 的轉置矩陣。

- (1) 請計算 $b_1 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y$ ，和 $b_2 = (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Y$ 。[10分]
- (2) 請解釋說明 b_1 和 b_2 的關係。[10分]

2. [30分，共4小題]

- (1) 請在 $x^4 + 144 \leq 25x^2$ 的條件下找出滿足 $f(x) = -x^4 + 20.48x^2$ 之極大極小值，計算出 x 與 $f(x)$ 。[10分]
- (2) 請計算下式的積分數值 $\int \frac{9x^2 - 5x + 6}{9x^2 - 6x + 5} dx$ 。[10分]
- (3) 已知 P 為線性方程組 $Ax=B$ 的解集合，且 P_H 為 $Ax=0$ 的解集合，那麼對於滿足 $Ax=B$ 的任一解 s 請證明 $P = \{s\} + P_H = \{s + p; p \in P_H\}$ 。[5分]
- (4) 假設存在一理想且封閉的生態系，其中只包含三大類生物，各類生物的能量獲得與輸出需相等才能維持生態系的恆定。若此生態系的生物間彼此獲取對方產物作為能量來源的比例如下方矩陣，請問是否存在一特定比例能維持此生態系的恆定，若有存在請計算出此比例，若不存在請說明原因。[5分]

	生物 A_產物	生物 B_產物	生物 C_產物
生物 A	0.4	0.2	0.2
生物 B	0.1	0.7	0.2
生物 C	0.5	0.1	0.6

3. [10分] 已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ，請求出 A 的特徵值及相應的特徵向量，並說明 A 是否可對角化。

見背面

4. [10 分] 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，請求出 A^{100} (需寫出計算過程)。
5. [10 分] 若已知矩陣 B 有三個特徵值，分別為 1, 2, 3，其相對應的特徵向量分別為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，與 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，請求出 B^{100} 的特徵值與相對應的特徵向量 (需寫出計算過程)。
6. [20 分] 請求出以下四小題的答案，每小題 5 分 (需寫出計算過程)：
- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(2+x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (2) 若 $x^2 - y^3 + 6 = 0$ ，求 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (3) $\int_0^{\sqrt{2}} x^5 \sqrt{x^2+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (4) 若 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 且 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ ，請求出 $3xyz$ 的極大值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

試題隨卷繳回