I. 計算題，每題 5 分(共 35 分，請附上計算過程)

1. 已知小剛現任女朋友有兩個手足(表示她父母有三個小孩)，請問小剛女友剛好是家中老大的機率是多少? 假設小剛一共交往過 3 個女朋友，每個女朋友都剛好有兩個手足，且每次交往皆為獨立事件。請問小剛每一個女朋友都剛好是家裡老大的機率多少? (3+2 分)
2. 已知 $E(y|x)=-4+0.5x$，$E(x|y)=y^2$，$E(x)=\mu_x$，$E(y)=0$，$Var(x)=3$，$Var(y)=\sigma_y^2$。請問 μ_x 和 σ_y^2 各是多少? (3+2 分)
3. 承上題，又已知 $Var(y|x)=c$ 為一實數，請計算 c 的值。
4. $\bar{x}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big/n$，請用才比雪夫不等式(Chebyshev inequality)說明 $\bar{x}_n$ 的一致性。
5. 一機率密度函數 $f(x,y)=6x^2y$，且 $0<x<1$，$0<y<1$；求累加機率密度函數(cdf)。
6. 已知常態分配機率密度函數為 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$，求常態分配的母體均數 E(x)。
7. 一線性迴歸模型母體為 $y_i=a+bx_i+e_i,\ \{e_1,\dots e_M,\dots e_N\}\overset{i.i.d.}{\sim}N(0,1)$；令 $\tilde{b}=\frac{y_1+y_N-2y_M}{x_1+x_N-2x_M}$，試論述 $\tilde{b}$ 的不偏性(若為偏誤估計式(biased estimator)，須說明為向上偏誤或向下偏誤)。

II. 是非題，每題 5 分(共 15 分，錯誤須說明並更正)

1. 令 $y_i=bx_i+e_i,\ e_i\overset{i.i.d.}{\sim}N(0,1)$；定義置中判定係數(centered coefficient of determination)為

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{\hat{y}})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

，則 R^2 一定落在[0,1]之間。

2. 一邏輯迴歸模型為: $\ln(\frac{p}{1-p})=a+bx_i+e_i$；$p$ 為 y_i=1 的機率，已知 a=3，b=1，則邊際效果(marginal effect) $dp/dx=1$。
3. 令 $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{N1} \\ y_{12} & y_{22} & & y_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1T} & y_{2T} & \cdots & y_{NT} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1T} & x_{2T} & \cdots & x_{NT} \end{bmatrix}$ 為 N 的個體追蹤 T 年之追蹤資料(panel data)。

$E(y|x)=\alpha+\beta x$。每一時間 $t(t=1\dots T)$裡，估計橫斷面迴歸模型 $y_i=a_t+b_tx_i+e_i,\ e_i\overset{i.i.d.}{\sim}N(0,1)$。

定義 Fama-MacBeth 迴歸估計為 $\tilde{b}=\sum_{t=1}^{T}\hat{b}_t/T$，$\hat{b}_t$ 為橫斷面迴歸的最小平方法估計式。則 $\tilde{b}$ 為向下偏誤估計式但為一致性估計式。

III. 問答與演算題 (共 50 分)

1. 令 X、Y 為兩個獨立的常態隨機變數，$X\sim N(0,1), Y\sim N(0,4)$，令 $S=X+Y$，$T=X-Y$。
   (1) 計算(S,T)之聯合分配(joint pdf)，需註明分配名稱與參數。(5 分)
   (2) 計算 S 與 T 之相關係數 $\rho_{S,T}$，並說明 S 與 T 是否無相關? 是否獨立? (3+1+1 分)
   (3) 計算 S 之動差母函數 mgf，以及 S 之前三次中心動差(central moments)，記為 μ_1,μ_2,μ_3。(4+1+2+3 分)

見背面

2. 設 $\{X_i\}_1^5 \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda=1)$ 為一組來自指數分配之隨機樣本，

   (1) 令 $\overline{X}=\sum_1^5 X_i/5$，計算常數 C 使 $P\{|\overline{X}-E\overline{X}|\geq C\}\leq 0.4$ 成立。(5 分)

   (2) 令 $X_{(i)}$表示第 i 階順序統計量(Order statistics)，計算中位數(median)之 pdf。(5 分)

   (3) 推導極小統計量 $X_{(1)}$之 pdf，並認出分配名稱及參數。(4+1 分)

3. 設 $\{X_i\}_1^n$ 為一組來自幾何 $Geo(p)$分配之隨機樣本(質點由“1”開始)

   (1) 寫出 p 之參數空間，以及求 p 之一個充份統計量，記為 S 並驗證 S 確實具充分性。(2+3 分)

   (2) 分別求 p 之動差估計元，及 $E(X_i)$之最大概似估計元(簡記為 $\hat{p}_{MME}$ 及 $\hat{u}_{MLE}$)(2+3 分)

   (3) 試求機率 $P(X_i>3)$ 之最大概似估計元。並求此機率任一不偏估計元變異數之 Cramer-Rao 下界值。(2+3 分)

試題隨卷繳回