

1. 請計算由直角座標 (x, y) 轉換為極座標 polar coordinates (r, θ) 之 Jacobian 值，並說明其幾何意義。其相關式： $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ 【計分：15 分】

2. 以高氏消去法 求算 x_1, x_2, x_3 之值 【計分：15 分】

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. 解下列方程式組：【計分：20 分】

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y$$

4. 試求算下列的行列式(n 階)之值：【計分：15 分】

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix} = ? \quad \text{其中 } y \neq z$$

5. 試求算下列的 A 矩陣之秩 (rank)：【計分：15 分】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 令 F 為複數的子體(subfield)， T 為從 F^3 至 F^3 的函數。定義 T 為

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

- (1) 試證： T 為線性變換(linear transformation)。【計分：6 分】
 (2) 若 (a, b, c) 為 F^3 的一向量，試問 a, b, c 在何種條件下， (a, b, c) 屬於 T 的值域(range)? 【計分：5 分】又， T 的秩(rank)為何? 【計分：2 分】
 (3) 試問 a, b, c 在何種條件下， (a, b, c) 屬於 T 的零空間(null space)? 【計分：5 分】又， T 的零維數(即，Nullity(T))為何? 【計分：2 分】

試題隨卷繳回