

※ 注意：請於試卷內之「非選擇題作答區」標明題號依序作答。

1. 解下列微分方程式之 envelope (singular solution)，並畫出圖形。【計分：15 分】

$$y = c x + c^{-1}$$

2. 解下列微分方程式：【計分：15 分】

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 24x^5$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 3, \quad y''(1) = 14$$

3. (a) 說明 Laplace Transformation 如何在 t-domain 及 s-domain 求解常微分方程式。【計分：5 分】

- (b) 以 Laplace Transformation 方法求解下列微分方程式：【計分：15 分】

$$y'' + 10y' + 24y = 144t^2 \quad ; \quad y(0) = \frac{19}{12}, \quad y'(0) = -5$$

4. 已知微分方程式： $EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = w(x)$ ， $-\infty < x < \infty$ ， E ， I ，及 k 均為常數。其中， $w(x)$ 為一周期函數，定義如下

$$w(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ w_0, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \quad w(x+2\pi) = w(x) \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

- (1) 試求 $w(x)$ 的傅立葉級數(Fourier series)。【計分：8 分】 (2) 試求微分方程式的特解 $y_p(x) = ?$ 【計分：7 分】

5. 求解下列邊界值問題(boundary-value problem)：【計分：20 分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, y_0) = 0, \quad \text{其中 } y_0 \text{ 為常數。}$$

6. (1) 已知向量 $\mathbf{v} = Q(x, y)\mathbf{i} - P(x, y)\mathbf{j}$ ，證明線積分 $\int_C Pdx + Qdy = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ ，其中 s 為曲線 C 的弧長變數， \mathbf{n} 為曲線 C 的單位法線向量。【計分：6 分】

(2) 試求
$$\oint_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \left[\frac{1}{(x-2)^2 + y^2} \right] ds = ?$$

其中 $C: x^2 + y^2 = 1$ ， \mathbf{n} 為曲線 C 上指向外的單位法線向量。 s 為曲線 C 的弧長參數。【計分：9 分】