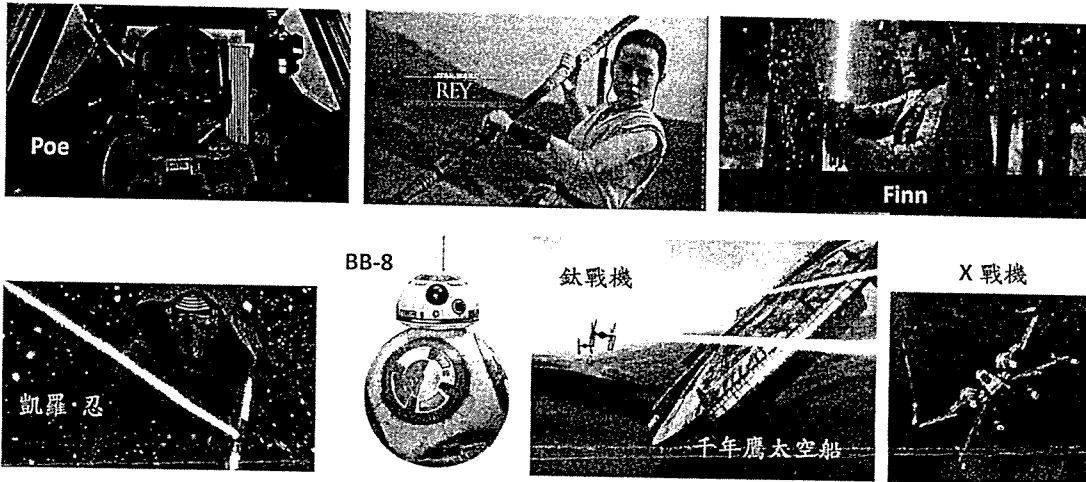


星際大戰第七步曲：原力覺醒(Star War Episode 7: The Force Awakens)

劇情與人物介紹 — 起初，有一個原力，這個原力創造了光，又將「光」和「暗」分開，但是，那黑暗勢力不斷破壞光明的星球。在賈庫星上抵抗黑暗勢力的 X 戰機飛行員波(Poe)被第一軍團凱羅·忍(Kylo Ren)俘虜，機器人 BB-8 帶著天行者路克(Luke Skywalker)的地圖逃亡，遇到了拾荒女芮(Rey)，同時，第一軍團風暴兵芬恩(Finn)良心發現救出了波，精采劇情就此展開。

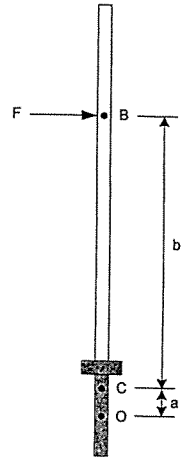


(照片自網路擷取，電影截圖版權屬於電影公司)

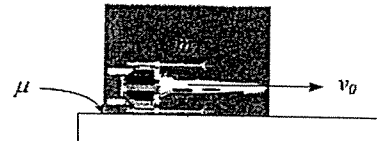
- 芮和芬恩帶著機器人 BB-8 在千年鷹太空船上，由賈庫星上起飛，逃離第一軍團風暴兵的追趕。假設條件、座標定義與參數如下：
 - XY 為慣性座標， \bar{a}_1, \bar{a}_2 為附在機艙的座標，交點為 B， ϕ 為 \bar{a}_1 與 Y 之間的夾角； \bar{b}_1, \bar{b}_2 為附在機艙中心到 BB-8 質心的座標， β 為 \bar{a}_1 與 \bar{b}_1 之間的夾角； \bar{c}_1, \bar{c}_2 為附在 BB-8 球體的座標，交點為 C， θ 為 \bar{c}_1 與 \bar{b}_1 之間的夾角；所有的運動都在 XY 面上。
 - BB-8 的球殼質量為 m ，球半徑為 r ，質心在球殼中心，相對質心的慣量(mass moment of inertia)為 $(2/3)mr^2$ ，頭的質量可忽略；機艙的半徑為 R ；機艙表面與 BB-8 之間有夠大的靜摩擦力，所以 BB-8 永遠都以純滾動方式運動，而且，千年鷹太空船的重量遠大於 BB-8 的重量。賈庫星的重力加速度和地球一樣為 g 。
 - 在圓筒形的機艙中，由靜止($v_A=0$)開始起飛的瞬間($t=0$)，BB-8 站在圓筒機艙底端($\phi=0$)；千年鷹太空船飛行方向為 $(-\bar{i})$ ，等加速度為 $\bar{a}_A = -a\bar{i}$ 起始等角速度為 $\bar{\omega}_a = \dot{\phi}\bar{a}_3 = \omega_0\bar{a}_3$ ，且 $\dot{\phi} = 0$ 。
 - 注意：BB-8 行進方式是圓球「殼」的滾動，他的頭永遠都會被球殼內的磁鐵吸住，「浮」在頂端。
- 定義 (\bar{a}_1, \bar{a}_2) 、 (\bar{b}_1, \bar{b}_2) 、 (\bar{c}_1, \bar{c}_2) 三個座標系統的絕對角速度向量。(5%)
 (Hint: ϕ 、 β 、 θ 的定義都是相對角度。)
- BB-8 在機艙內 XY 面純滾動時，角速度 $\dot{\phi}$ 、 $\dot{\beta}$ 、 $\dot{\theta}$ 之間的關係是甚麼?(10%)
- 起飛瞬間($t=0$)，BB-8 在無預警的情況下突然自由滾動，請寫出 BB-8 的運動方程式。(10%)
- 依據以上運動方程式，求 BB-8 在($\phi=0$)瞬間的角加速度、底部受到的正向力、以及摩擦力。(10%)
 (Hint: 機艙表面與 BB-8 之間有夠大的靜摩擦力，BB-8 永遠都以純滾動方式運動。)

見背面

3. 具原力者對戰時常以光劍 (lightsaber) 作為武器，手握實體劍柄，以原力 (force) 生成劍刃與劍身，以進行攻擊和防禦。
- (a) 如右圖所示，當芮 (Rey) 與凱羅·忍 (Kylo Ren) 進行對戰時，芮以雙手握住光劍，以劍刃上 B 點與凱羅·忍的光劍相碰。假設光劍質心 (center of mass) 位於 C 點，雙手交界處 O 點可視為揮舞光劍的支點和旋轉中心，且兩光劍相碰時所產生之衝擊力 (impulse force) F 垂直於光劍劍刃方向。試計算 B 點和 C 點間之距離 b ，使光劍相碰產生衝擊力時，O 點不具有反衝擊力 (impulsive reaction)。並討論此距離 b 和光劍 radius of gyration (k_C) 和 C 點與 O 點間之距離 a 三者之間的關係。(10%)
- (b) 假設光劍劍刃與劍身之質量 (mass) 可以忽略，僅劍柄處具有質量。試由單純揮舞光劍和由子題(a)的光劍對戰的情境，來說明光劍與一般金屬刀劍之間的差異與各自優劣。(5%)



4. 反抗軍飛行員 (Resistance pilot) 駕駛 X 翼戰機 (X-wing fighter) 攻擊由冰層星球改造的弒星者基地 (Starkiller Base) 時，不幸被防衛武器擊中，失速後以水平初始速度 v_0 滑行於靜止於滑冰上另一大片戰艦殘骸上。假設戰機質量為 m_A ，戰艦殘骸質量為 m_B ，兩者間具有摩擦力 (係數 μ)，而戰艦殘骸和滑冰之間無摩擦力 (frictionless)。在戰機於戰艦殘骸上滑行的過程中，戰艦殘骸也會被帶動前進，於時間 t 之後兩者會以相同速度 v_f 滑行，試計算
- (a) 戰機與戰艦殘骸最終的滑行速度 v_f 。(5%)
- (b) 由一開始到時間 t 時，戰機於戰艦上滑行的相對距離，與戰機相對於冰面的滑行距離。(5%)
- (c) 戰機與戰艦殘骸開始相同滑行速度的時間 t 。(5%)



5. 如右側左圖所示，BB-8 為 X 翼戰機 (X-wing fighter) 的飛行輔助機器人 (droid)，其具有一個半球形的頭部和圓球形的身體。由於球的外型，使其具有在地表上全向 (omni-directional) 移動的能力，但由於身體的圓球和地面之間為點接觸，運動上有平衡的議題，驅動時需注意動態和控制的搭配。
- (a) 如右側右圖所示，在本題中將 BB-8 簡化為「平面模型」，頭部由均質半圓形組成，半徑為 r ，身體由均質圓形組成，半徑為 $2r$ ，頭部和身體的密度均為 ρ 。試計算此模型的質心位置 (以此平面模型垂直站立時，相對於地面接觸點 C 的座標來表達) 和對質心的質量慣性矩 (mass moment of inertia)。(6%)
- (b) 接續子題(a)，假設身體圓形和地面間為純滾動，頭部半圓形可固定於身體圓形上方，如右圖所示，試以圓形滾動的角度 θ 來表達此 BB-8 平面模型的運動方程式。(10%)
- (c) 接續子題(a)和(b)，分析此系統的穩定性。是否能如不倒翁般自穩定？若能，說明原因。若不能，該如何改善？(4%)

