

微積分

1. 試判定以下兩級數之收斂與發散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ (2分)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ (3分)

2. 定義 Gamma 函數 $\Gamma(\cdot): R^+ \rightarrow R^+$ 為 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $\alpha > 0$

(1) 試驗證 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, 對所有 $\alpha > 0$ 成立。(5分)

(2) 當 n 為自然數時, 驗證 $\Gamma(n+1) = n!$ 。(5分)

3. 設一長方體其長寬高分別記為 x, y, z , 請計算此長方體之體積在限制條件為 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ 之最大值。(5分)

4. 將函數 $f(x, y) = \ln(1+x+2y)$ 在原點 $(0, 0)$ 以泰勒展式展開至二次式。
(其中 $\ln(\cdot)$ 為自然對數函數) (5分)

5. 請求出下列極值(5+5分)

(1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t}$

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} (1+2t)^{1/(2 \ln t)}$

6. 考慮一定義在範圍 $0 < x < y$ 上的函數 $f(x, y) = e^{-y}$ 。請求出 $f(x, y)$ 在集合 $A = \{x + y > 2\}$ 上的積分数值。(5分)

7. 請計算下列積分(5+5分)

(1) $\int_3^4 \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

見背面

線性代數

8. 設 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 之固有值(eigenvalues)及固有向量(eigenvectors)所對應之固有空間。
(3+3分)

(2) 求兩方陣 P 及 D ，其中 D 為對角方陣，使 A 可表為 $PDP^{-1} = A$ 。(4分)

(3) 請計算 A 之指數矩陣(exponential matrix) $\exp(A)$ 。(5分)

9. 設一函數 $f(\cdot): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 為

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - yz - 5y$$

(1) 請判定 $f(\cdot)$ 具有局部極大或局部極小值。(5分)

(2) 試計算 $f(\cdot)$ 之局部極小點，記為 (x^*, y^*, z^*) ，及 $f(\cdot)$ 之局部極小值。(2+3分)

10. 給定兩矩陣 C 和 D (其中 D 有反矩陣)，滿足 $CD = -DC$ 。請證明以下敘述。(5+5分)

(1) 若 λ 為 C 的固有值(eigenvalue)，則 $-\lambda$ 亦為 C 的固有值

(2) 若 x 為 C 的固有向量(eigenvector)，則 Dx 亦為 C 的固有向量

11. 給定一投影矩陣(projection matrix) A 。請證明以下敘述。(5+5分)

(1) A 的固有值(eigenvalue)只有 0 和 1

(2) $\text{rank}(A) = \text{trace}(A)$

12. 請詳細敘述 singular value decomposition (SVD)。(5分)

試題隨卷繳回