國立臺灣大學 103 學年度碩士班招生考試試題

1. (共 10 分) 考慮以下函數

$F(u,v)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{1/\theta}$ ， $0<\theta<\infty$ ， $0\le u,v\le 1$

(1) 計算 $f(u,v)=\dfrac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u \partial v}$ =________________ (5 分)

(2) 計算 $\int_{0.5}^{1}\int_{0}^{1} f(u,v)dudv$ =______________ (5 分)

2. (共 15 分) 令函數 $G(x,y)$ 為將 $u=1-e^{-x}$ 且 $v=1-e^{-y}$ 代入上題的 $F(u,v)$ 中，在此 $0\le x,y<\infty$

(1) 計算 $g(x,y)=\dfrac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y}$ =________________ (5 分)

(2) 計算 $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(x,y)dxdy$ =________________ (5 分)

(3) 計算 $\lim_{n\to\infty}\{G(x+\log n, y+\log n)\}^{n}$ =________________ (5 分)

3. (共 15 分) 計算 $\dfrac{dy}{dx}$

(1) $2(x^2+y^2)^2=25(x^2-y^2)$ (5 分)

(2) $y=2^{e^x}$ (5 分)

(3) $y=\tan^{-1}x$ (5 分)

4. (共 10 分) 計算下列積分

(1) $\int_{3}^{6} t\sqrt{t^2-2}dt$ (5 分)

(2) $\int t(2t+3)^{3/2}dt$ (5 分)

見背面

5. (共 20 分) 令矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 0.5 & 1.5 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

請回答下列問題:

(1) 請說明 A 的秩（rank）為何？ (4 分)

(2) 請說明為何 A 是一個冪等矩陣 (Idempotent matrix) ？ (4 分)

(3) 請說明為何 I − A 是一個冪等矩陣 (Idempotent matrix) ？ (4 分)

(4) 請證明 A(I − A) = 0. (4 分)

(5) 請找出 A 的特徵值 (eigenvalues). (4 分)

6. (共 10 分) 給定矩陣 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$。令 $\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}$ 並表示為 $B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$ 。

請驗證以下的表達式

(1) $\mathrm{B}_{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$。(5 分)

(2) $\mathrm{B}_{12}=-(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$。(5 分)

7. (共 20 分) 考慮一線性迴歸模式 $Y=X\beta+\varepsilon$ ，其中 $Y=(Y_1,\dots,Y_n)^{\mathrm{T}}$ 為 n 個樣本的反應變數向量(response vector)，$X=[X_1\ X_2]$，其中 X_i 為 $n\times p_i$ 的解釋變數矩陣(covariate matrix)，$\beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$，$\beta_i$ 為 $p_i\times 1$ 的參數向量(parameter vector)，ε 為 $n\times 1$ 的誤差向量(error vector)，i=1,2。定義 I_n 為 $n\times n$ 的單位矩陣(identity matrix)。假設 $n\geq p_1+p_2$。最小平方估計(least squares estimate，簡稱為 LSE) 利用 $\min_\beta (Y-X\beta)^T(Y-X\beta)$ 來估計 β，LSE 的解為 $\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$。

(1) 令 $\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix}$。請驗證 $\hat{\beta}_1=(X_1^{*T}X_1^*)^{-1}X_1^{*T}Y$，其中 $X_1^*=(I_n-H_2)X_1$ 以及 $H_2=X_2(X_2^TX_2)^{-1}X_2^T$。(6 分)

(2) 請驗證 H_2 為一投影矩陣(projection matrix)，並求出 H_2 的秩(rank)。(8 分)

(3) 假設 $\tilde{\beta}_1$ 是只使用 (Y,X_1) 所得到的 LSE 估計式。請給一條件使 $\tilde{\beta}_1=\hat{\beta}_1$。(6 分)

試題隨卷繳回