

I. 統計個案分析 (共 50 分)

小智的碩士論文研究皮卡丘放電電流、情緒高低與飲食的關聯性。經過研究得到資料如下：

電流(Y)	1	6	7	11	12	13	15	18	19	20	23	24	29	32	39
情緒(X_1)	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
食量(X_2)	3	4	6	4	7	4	3	8	4	3	8	9	6	6	5

電流(Y)為皮卡丘使出絕招十萬伏特的電流量(單位：千安培)。情緒指標(X_1)等於 0 表示皮卡丘情緒低落，1 表示皮卡丘情緒亢奮。食量(X_2)表示皮卡丘的食量。小智依據實驗過程，欲逐步檢驗 10 個統計問題。請幫小智依序回答下列問題(請附上計算過程，每題五分)。

- 小智欲知電流 Y 的分布情況，畫出直方圖。請以 5(千安培)為組距畫出 Y 的次數分配圖。
- 小智要檢測電流資料 Y 是否符合常態分配，請畫出 Y 變數的 Normal quintile plot(Q-Q plot)，說明並判斷 Y 是否為常態分配資料(提示：用前 14 筆資料繪之即可)。
- 請以第 1 題之組距為卡方檢定基礎，檢測電流資料在單尾 5% 顯著水準下，是否符合常態分配(卡方臨界值為 23.68)。
- 小智認為皮卡丘情緒高低與放電波動性有關，請用 F 檢定檢測皮卡丘電流的變異數在情緒低落與情緒亢奮時是否有差異(以單尾 5% 顯著水準檢定之， $F(6,7)$ 臨界值為 4.21)。
- 請以上題結論，檢定情緒低落與情緒亢奮時，皮卡丘平均放電電流是否有差異(以雙尾 5% 顯著水準檢定之， t 分配臨界值為 2.16)。
- 小智建立簡單迴歸模型： $Y = \alpha + \beta X_1 + e$ ，請幫小智估算迴歸係數 $\hat{\beta}$ 的最小平方法估計值。
- 小智建立複迴歸模型： $Y = a + bX_1 + cX_2 + e$ ，請幫小智估算迴歸係數 \hat{b} 和 \hat{c} 的最小平方法估計值。
- 請問該複迴歸的調整判定係數是多少？
- 如果小智用統計軟體分析上述資料，請寫出計算 Y 、 X_1 相關係數的語法(寫出 SAS、Stata、R 任一統計軟體的語法即可，如所用語法為其他統計軟體亦請說明)。
- 如果小智用統計軟體從事迴歸分析，請寫出計算迴歸模型： $Y = a + bX_1 + cX_2 + e$ 的語法(寫出 SAS、Stata、R 任一統計軟體的語法即可，如所用語法為其他統計軟體亦請說明)。

II. 問答與計算題 (共 50 分)

- 設 X 與 Y 為兩個獨立同態的隨機變數 $N(0,1)$ ，令 $S=X-Y$ ，
 - 請計算 (X,S) 之聯合機率密度函數(joint pdf)，並認出此分配之名稱及參數。(10 分)
 - 給 $S=2$ ，請寫出條件分配 $X|_{S=2}$ 之分配名稱及參數(不需推導)。並以此題驗算下列等式成立，(即分別計算左右各三項之值帶入檢驗)。

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|S)) + \text{Var}(E(X|S))$$
 (5+1+2+2 分)
- 設 $\{X_i\}_1^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exponential}(\theta)$ 分配，其中 θ 之單位為時間，令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
 - 當 n 固定，試計算 S_n 之動差母函數(mgf)並認出 S_n 之分配，需註明其分配名稱及參數。

見背面

(5分)

(2) 當 $n > 30$ 且固定，試求 S_n 之漸近分配，需說明理由及註明其分配名稱及參數。(5分)

(3) 令 Y_1 為 $\{X_i\}_n^i$ 之極小統計量，請計算 Y_1 之機率密度函數(pdf)並認出 Y_1 之分配名稱及參數。(5分)

3. 設 $\{X_i\}_i^5 \sim U(0, \theta)$ 為一組分布於區間 $[0, \theta]$ 之均勻分配的五個隨機樣本，

(1) 試寫 θ 之參數空間 Ω ，並求 θ 之一個充份統計量(sufficient statistics)。(1+4分)

(2) 請計算 θ 之最大似估計元 $\hat{\theta}$ 。(5分)

(3) 計算 θ 之動差法估計元 $\tilde{\theta}$ ，並說明 $\tilde{\theta}$ 是否具有不偏性(unbias)? (2+3分)

附錄

Standard Normal probabilities

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0200	.0240	.0280	.0320	.0360
0.1	.0044	.0088	.0132	.0175	.0217	.0259	.0301	.0344	.0386	.0428
0.2	.0088	.0136	.0183	.0229	.0274	.0319	.0364	.0409	.0453	.0497
0.3	.0139	.0194	.0248	.0301	.0353	.0405	.0456	.0507	.0557	.0607
0.4	.0199	.0264	.0328	.0391	.0453	.0514	.0574	.0633	.0691	.0748
0.5	.0257	.0332	.0405	.0477	.0548	.0618	.0687	.0755	.0822	.0888
0.6	.0328	.0415	.0499	.0581	.0661	.0739	.0816	.0891	.0965	.1038
0.7	.0409	.0505	.0598	.0688	.0775	.0860	.0943	.1024	.1103	.1180
0.8	.0497	.0603	.0706	.0806	.0903	.0997	.1088	.1177	.1264	.1349
0.9	.0599	.0716	.0830	.0941	.1049	.1154	.1256	.1355	.1451	.1545
1.0	.0708	.0833	.0954	.1071	.1185	.1296	.1404	.1509	.1611	.1711
1.1	.0822	.0958	.1090	.1219	.1345	.1468	.1587	.1703	.1816	.1925
1.2	.0938	.1086	.1230	.1371	.1508	.1641	.1770	.1896	.2019	.2139
1.3	.1056	.1216	.1371	.1522	.1669	.1812	.1951	.2087	.2220	.2350
1.4	.1175	.1346	.1512	.1674	.1832	.1986	.2136	.2283	.2427	.2568
1.5	.1293	.1476	.1653	.1826	.1995	.2160	.2322	.2480	.2635	.2787
1.6	.1411	.1607	.1796	.1980	.2160	.2336	.2509	.2678	.2844	.3007
1.7	.1528	.1737	.1930	.2118	.2302	.2482	.2658	.2831	.2999	.3164
1.8	.1645	.1866	.2063	.2256	.2445	.2630	.2811	.2988	.3161	.3331
1.9	.1762	.2000	.2200	.2390	.2578	.2763	.2944	.3121	.3294	.3464
2.0	.1879	.2136	.2348	.2549	.2747	.2941	.3130	.3315	.3496	.3673
2.1	.1995	.2273	.2499	.2706	.2911	.3113	.3311	.3505	.3695	.3881
2.2	.2111	.2410	.2649	.2867	.3081	.3290	.3494	.3693	.3888	.4079
2.3	.2227	.2538	.2790	.3019	.3253	.3481	.3704	.3922	.4136	.4345
2.4	.2344	.2667	.2933	.3174	.3426	.3680	.3927	.4170	.4408	.4641
2.5	.2461	.2800	.3080	.3334	.3599	.3866	.4136	.4400	.4658	.4911
2.6	.2578	.2930	.3223	.3490	.3769	.4051	.4336	.4615	.4888	.5155
2.7	.2695	.3061	.3367	.3648	.3935	.4226	.4521	.4810	.5093	.5370
2.8	.2811	.3191	.3510	.3804	.4103	.4406	.4713	.5024	.5329	.5628
2.9	.2927	.3321	.3653	.3960	.4271	.4585	.4902	.5222	.5545	.5861
3.0	.3043	.3451	.3796	.4118	.4443	.4771	.5102	.5435	.5770	.6107
3.1	.3159	.3580	.3938	.4273	.4611	.4951	.5293	.5637	.5983	.6330
3.2	.3275	.3709	.4079	.4428	.4779	.5131	.5484	.5838	.6193	.6549
3.3	.3391	.3838	.4220	.4582	.4945	.5308	.5671	.6034	.6397	.6760
3.4	.3507	.3968	.4363	.4738	.5114	.5490	.5865	.6240	.6614	.6987
3.5	.3623	.4098	.4507	.4895	.5282	.5667	.6051	.6434	.6816	.7197
3.6	.3739	.4228	.4651	.5051	.5448	.5842	.6233	.6622	.7009	.7394
3.7	.3855	.4358	.4795	.5208	.5616	.6020	.6421	.6819	.7214	.7607
3.8	.3971	.4488	.4940	.5365	.5782	.6195	.6604	.7010	.7413	.7813
3.9	.4087	.4620	.5086	.5524	.5962	.6387	.6808	.7225	.7639	.8050
4.0	.4203	.4751	.5232	.5683	.6133	.6579	.7021	.7459	.7893	.8323
4.1	.4319	.4882	.5377	.5841	.6303	.6761	.7214	.7662	.8106	.8545
4.2	.4435	.5013	.5523	.6000	.6474	.6952	.7425	.7892	.8355	.8813
4.3	.4551	.5144	.5669	.6161	.6649	.7131	.7607	.8078	.8544	.9005
4.4	.4667	.5275	.5815	.6319	.6816	.7306	.7789	.8265	.8736	.9201
4.5	.4783	.5406	.5961	.6478	.6987	.7487	.7979	.8454	.8921	.9382
4.6	.4899	.5537	.6107	.6638	.7160	.7671	.8173	.8647	.9113	.9571
4.7	.5015	.5668	.6254	.6799	.7332	.7853	.8365	.8839	.9305	.9763
4.8	.5131	.5799	.6401	.6959	.7502	.8031	.8547	.9013	.9470	.9918
4.9	.5247	.5930	.6557	.7128	.7682	.8220	.8734	.9191	.9640	.1000
5.0	.5363	.6061	.6704	.7289	.7856	.8406	.8939	.9405	.9863	1.0000

試題隨卷繳回