

1. 請求算下述矩陣之秩 (rank)：【計分：10 分】

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

2. 某一流體運動之速度向量(velocity vector)  $\vec{v} = -0.25y\vec{i} + 4x\vec{j} + 0\vec{k}$  (註：k 方向分量為零)

- (1) 此流體是否為無旋性流體 (irrotational)? 試證明之。【計分：5 分】
- (2) 此流體是否為不可壓縮流體 (incompressible)? 試證明之。【計分：5 分】
- (3) 並請求算流體質點運動的路徑軌跡 (path)。【計分：10 分】

3. 解下列方程式組：【計分：20 分】

$$\begin{cases} y'_1 = 10y_1 - 6y_2 + 10(1-t-t^2) \\ y'_2 = 6y_1 - 10y_2 + 4 - 20 - 6t^2 \end{cases}$$

4. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求  $A^n$ ，其中  $n$  為正整數【計分：10 分】。試求  $A^{-10} = ?$  【計分：5 分】

5. 已知  $n$  階的凡德爾蒙得行列式(Vandermonde determinant of order  $n$ )定義為

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

證明： $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ 。【計分：15 分】

6. 假設  $T: R^3 \rightarrow R^2$  為一線性變換(Linear transformation)，其中  $T\left(\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} x+3y+4z \\ -2x-y+2z \end{bmatrix}$ 。

- (1) 若  $B_1 = \{(1, 0, 1)^T, (2, 3, 4)^T, (-5, 2, 1)^T\}$  與  $B_2 = \{(1, 1)^T, (2, 3)^T\}$  分別是  $R^3$  與  $R^2$  的基底 (Basis)。試求線性變換  $T$  的代表矩陣  $A$ 。【計分：6 分】
- (2) 若  $R^3$  與  $R^2$  的基底均改用標準基底(即分別為  $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$  與  $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ )。試求線性變換  $T$  的代表矩陣  $\tilde{A}$ 。【計分：6 分】
- (3) 若  $u = (-1, 4, 2)^T$ ，試利用(1)所求得的代表矩陣  $A$  求算  $T(u)$ 。【計分：6 分】
- (4) 由(3)的結果，試問線性變換  $T$  之函數值會否受基底影響? 【計分：2 分】