

1. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$(x^4 + y^2)dx - xydy = 0 ; y(2) = 1$$

2. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$x^2 y'' - x y' + y = x \ln|x|$$

3. (a) 試說明如何利用 Laplace Transformation 求解常微分方程式。【計分：5分】

- (b) 求解下列微分方程式 (本題限用 Laplace Transformation 方法)：【計分：15分】

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = y' = 0$$

$$r(t) = 1 \text{ if } 0 < t < 1 \text{ and } r(t) = 0 \text{ if } t > 1$$

4. 求解下列的偏微分方程式：【計分：20分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{e^{-t}}{\rho}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad c \text{ 與 } \rho \text{ 均為常數。}$$

$$\text{邊界條件： } u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{初值條件： } u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < L$$

5. 已知週期函數  $f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2, & -\pi < x < 0 \\ \pi x - x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

- (a) 試求  $f(x)$  的傅立葉(Fourier)級數。【計分：6分】

- (b) 利用巴瑟沃恆等式(Parseval's identity)求算  $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots = ?$  【計分：9分】

6. 已知向量場  $\mathbf{F} = e^y \cos z \mathbf{i} + \sqrt{x^3 + 1} \sin z \mathbf{j} + (x^2 + y^2 + 3) \mathbf{k}$ ，且曲面  $S$  由下式所界定：

$$z = (1 - x^2 - y^2)e^{1-x^2-3y^2}, \quad z \geq 0$$

其中，曲面  $S$  的單位法線向量指向外，如 Fig. A 所示。

試求面積分  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = ?$  【計分：15分】

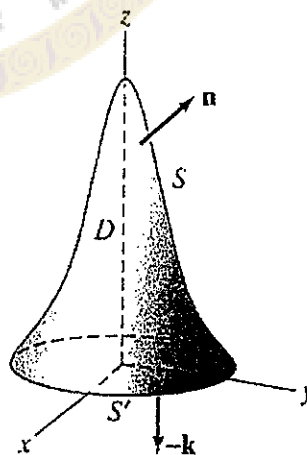


Fig. A