

一、(20分)考慮一在平面上運動的剛性粒子  $P$ ，其加速度為  $\bar{a}$ ，速率為  $v$ 。若  $P$  隨時間  $t$  變化之軌跡為一曲率為  $\kappa$  之曲線  $S$ ，則  $P$  之切線加速率與法線加速率分別為多少？須寫出推導過程，只寫答案者不予計分

二、(20分)求解以下問題：

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + W(x,t), 0 < x < 1, 0 < t$$

$$T(0,t) = a(t), 0 < t$$

$$T(1,t) = b(t), 0 < t$$

$$T(x,0) = f(x), 0 < x < 1$$

三、若  $i = \sqrt{-1}$ ，求以下函數(各 5 分)：(a)  $i^i = ?$ ，(b)  $\ln(1+i) = ?$

四、若  $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ，求解下列微分方程式(各 10 分)：

(a)  $y' + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}$

(b)  $\frac{(y'')^2}{(y')^2} + \frac{(y)(y'')}{y'} - y' = 0$

五、(15分)若  $y_1, y_2, y_3$  皆為  $t$  之函數( $t \geq 0$ )，請以拉氏轉換法(Laplace transform)，求解下列聯立微分方程式：

$$\begin{cases} y_1' + y_2 = \sin(t) \\ y_2' - y_3 = e^t \\ y_1 + y_2 + y_3' = 1 \end{cases}$$

當  $t = 0$  時， $y_1 = 0$ ； $y_2 = 1$ ； $y_3 = 1$

六、(a) 若  $R$  和  $S$  皆為對稱矩陣(symmetric matrix)且階數相同，則將此二矩陣相乘時，乘積  $RS$  是否為對稱矩陣？須以矩陣相關定理證明你的答案。(5分)

(b) 求出下列矩陣之秩(rank) (5分)：(須寫出求解過程)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(c) 求解下列矩陣之反矩陣(inverse matrix) (5分)：(須寫出求解過程)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$