※ 注意：**請於試卷上依序作答，並應註明作答之大題及小題題號。**

1. (30 分，共 10 小題)

假設 X_1 及 X_2 是獨立且有相同分配(i.i.d.)之兩個隨機變數，其個別機率密度函數 (p.d.f.) 寫為 $P(X_i) = 2x_i$ (i=1,2)。

請回答下列問題:

(1) 假設兩者樣本空間所有可能值皆落於(0,1)區間。其聯合機率密度函數 (p.d.f.), $P(X_1, X_2)$, 在$0 < X_1 < 1$及$0 < X_2 < 1$寫為

____

(2) 假設吾人對於$Y_1 = {X_1}/{X_2}$之比例變項之機率密度函數感興趣，且希望在下列逆函數轉變是一對一(one-to-one)函數的情境，我們須要輔助變數Y_2，

$Y_2 = X_2$，

$Y_1 = f_1(X_1, X_2) = {X_1}/{X_2}$，

$Y_2 = f_2(X_1, X_2) = X_2$。

寫出以 Y_1 及 Y_2 表示之逆函數

$X_1 = f_1^{-1}(Y_1, Y_2) =$________________

$X_2 = f_2^{-1}(Y_1, Y_2) =$________________

(3) 請寫出$y_1 y_2$之範圍 ________________

(4) 吾人欲求y_1及y_2之聯合機率密度函數$P(Y_1, Y_2)$，則須要 Jacobian 矩陣之行列式，寫出其行列式 ________________

(5) 在y_1,y_2,及$y_1 y_2$之範圍下，利用(4)寫出以y_1及y_2表示之聯合機率密度函數, $P(y_1, y_2)=$________________

(6) 計算 $\iint P(y_1, y_2) dy_1 dy_2 =$________________

(7) 寫出不同範圍y_1之下之$p(y_1)$

$P(y_1) =$________________ $0 < y_1 < 1$

$P(y_1) =$________________ $1 < y_1 < \infty$

(8) 若$x_1 < \frac{1}{2}$，$x_2 < 0.8$，$P(Y_1 Y_2 < a, Y_2 < b)$，其中 a=__________，b=__________

(9) 上述題(8)之積分式為________________

(10)上述題(9)積分後之值為________________

見背面

國立臺灣大學 102 學年度碩士班招生考試試題

2. (5 分，共 2 小題)

$f(x)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ，請回答下列問題:

(1) 以x_1及x_2表示$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ = ____________________

(2) $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=2\times\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，其中 a=______，b=______，c=______，d=______

3. (共 40 分)

考慮資料$\{X_1,\dots,X_n\}$其中$X_i\in R^2$。令$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})^T$為$\{X_1,\dots,X_n\}$之樣本共變異數矩陣(sample covariance matrix)，其中$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$為樣本平均數。假設$\lambda_1>\lambda_2>0$為$S$的特徵值(eigenvalue)。定義$I_n$為秩(rank)等於$n$的 identity matrix，以及$1_n$為長度$n$的 1 向量(其元素皆為 1)。

請回答下列問題:

(1) (5 分) 驗證$H_n=\left(I_n-\frac{1}{n}1_n1_n^T\right)$為一投影矩陣(projection matrix)。

(2) (5 分) H_n的秩為多少?

(3) (6 分) 定義$X=[X_1,\dots,X_n]^T$為$n\times 2$的資料矩陣。驗證$S=\frac{1}{n}X^TH_nX$。

(4) (9 分) 定義γ_1為一單位長度向量($\gamma_1^T\gamma_1=1$)並且極大化$\gamma_1^TS\gamma_1$。驗證γ_1為S的特徵向量(eigenvector)，且其相對應的特徵值為λ_1.

(5) (9 分) 定義γ_2為另一單位長度向量且與γ_1正交(orthogonal)。若γ_2極大化$\gamma_2^TS\gamma_2$，驗證γ_2為S的特徵向量，且其相對應的特徵值為λ_2。

(6) (6 分) 定義$\Gamma=[\gamma_1,\gamma_2]$以及$U_i=\Gamma^TX_i, i=1,\dots,n$。驗證$\{U_1,\dots,U_n\}$的樣本共變異數矩陣為一對角矩陣(diagonal matrix)，且其對角線的元素為λ_1及λ_2。

4. (共 25 分) 請回答下列問題:

(1) (5 分) 請計算 $\frac{d}{dx}\left[x^{\sqrt{2x}}\right]$。

(2) (5 分) 矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 8\end{bmatrix}$，請計算矩陣 A 的反矩陣。

(3) (10 分) 矩陣 $B=\begin{bmatrix}11 & -2 & -7\\7 & -1 & -5\\10 & -2 & -6\end{bmatrix}$，請求出矩陣 B 的特徵值與相對應的特徵向量。

(4) (5 分) 若 $f(x)+x^3\cdot\left[f(x)\right]^2=5$，且$f(2)=3$，請計算$f'(2)$。

試題隨卷繳回