I. 填空題 (每格 2 分，共 50 分，請按空格編號，依序作答。若無適當答案，請填無解。)

■ 柯西分配(Cauchy)的期望值為___(1)___，變異數為___(2)___。

■ 學者根據資料研究上市公司財務危機發生機率，Y=1 表示發生某公司財務危機。研究人員使用邏輯迴歸分析(logistic regression analysis)，並以統計軟體 SAS 運算兩種財務危機模型(模型一與模型二)得到下列分析結果:

	模型一		模型二	
N	200		200	
McFadden's LRI	0.75		0.82	
Log Likelihood	-0.5063		-0.0251	
	估計係數	P 值	估計係數	P 值
截距項 (Intercept)	1.25	0.654	2.11	
資產報酬率 (ROA)	-0.98	0.001		
負債比率 (LEV)	0.31	0.032		
信用評等 (RATING)			0.08	0.001

模型一的邏輯迴歸式可表示成 P(Y=1)=___(3)___。根據 Log Likelihood 值判斷模型配適度，其值越___(4)___，則模型配適度越好，若根據兩個模型的 Log Likelihood 值，我們可以知道___(5)___的迴歸模型比較有解釋財務危機的能力。

■ 假使某樣本包含 30 個觀察值，其數值依序如下:

1	2	5	1	3	5	2	4	6	7
8	1	6	6	5	1	3	0	1	1
2	2	9	9	8	2	8	8	7	7

根據連檢定法(run test)檢定該序列之隨機性(H_0: 此序列為隨機序列)，可以得到 Z 值為___(6)___，並在 5%的顯著水準下，統計檢定結果___(7)___(接受或拒絕虛無假說)。

■ 已知 $f_{x,y}(x=a,y=b)=\frac{1}{k}(a+b),\ 0\le a\le 2, 0\le b\le 2$；滿足機率條件的 k 值應為___(8)___；其 x 的條件期望值 $E(x|y)$為___(9)___。另 $g(y)$為 y 變數的任一函數，當均方誤 $E[x-g(y)]^2$ 為最小的時候，$g(y)$等於___(10)___。

■ 一個 14 面的惡魔骰子，每一面數字分別為 1 至 14；隨機投擲每面正面朝上機率皆相同。令第一次投擲正面朝上數字為 x，第二次投擲正面朝上數字為 y，則機率 $P(x>y)$為___(11)___，機率 $P(x+y$ 可被 3 整除$)$為___(12)___。

■ 某飲料商宣稱其產品至少有 96%的比例裝滿 300 毫升(令該宣稱為虛無假說)，消基會實際抽測 900 個樣本的結果，發現有 63 件不足 300 毫升，依據大樣本常態分配檢定方式，在 5%的顯著水準下，其 Z 值為___(13)___；統計檢定結果___(14)___(接受或拒絕虛無假說)。

■ 假使我們投擲四個公正銅板 100 次，此 100 次投擲中出面正面的情形如下:

出現正面個數	0	1	2	3	4
出現次數	11	26	31	22	10

出現三個正面的機率理論值為___(15)___。請問根據卡方檢定，其卡方值為___(16)___，統計檢定結果___(17)___(接受或拒絕虛無假說；對應卡方值臨界值為 9.5)。

■ 小明調查公車車廂廣告，選定七個車站，每車站每十分鐘公車到站數 x 若遵循卜瓦松分配(Poisson distribution)，七個車站的每十分鐘公車到站數 x 的平均數 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ 分別為 0.03, 0.07, 0.15, 0.15, 0.3, 0.3, 0.6。令 y 為小明調查到的公車總數(假設每站停留十分鐘)，$y=x_1+x_2+\cdots+x_7$。則可得知 y 的期望值為___(18)___；y 的變異數為___(19)___；且調查公車廣告總數少於等於兩台的機率 $P(y\leqq 2)$為___(20)___。

見背面

國立臺灣大學 102 學年度碩士班招生考試試題

■ 設定迴歸直線 $y_t = a + bx_t + e_t$，e_t 為 iid 常態分配。$\sum x$=90，$\sum x^2$=400，$\sum y$=100，$\sum y^2$=1200，$\sum xy$=600，樣本數 n=100。最小平方法下的斜率估計係數 $\hat{b}$ 為___(21)___，截距估計係數 $\hat{a}$ 為___(22)___，迴歸判定係數為___(23)___；當 x_0=1 時 y 之 95%的預測區間介於___(24)___(下界)與___(25)___(上界)之間(簡化使用 Z 臨界值 1.97)。

II. 問答與計算題 (共 50 分)

1. (1) 設一離散隨機變數 X 之動差母函數(mgf) $M_X(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ ，
   試認出 X 分配名稱及參數，並計算期望值 $E[X]$及變異數 $Var(X)$。 (3+1+1 分)

   (2) 設一連續隨機變數 X~Gamma(3, 1)，試推導 X 之 mgf，並計算 X 之前三次原動差(raw moments) $E(X)$，$E(X^2)$，$E(X^3)$。 (4+1+2+3 分)

2. 設 $\{X_i\}_1^5 \overset{i.i.d}{\sim} Exp(\lambda = 1)$ 為一組來自指數分配之隨機樣本，令 $X_{(i)}$表示第 i 階順序統計量(order statistics)。
   (1) 試寫出$(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(5)})$之聯合分配(joint pdf)。 (3 分)
   (2) 試計算中位數之 pdf。 (4 分)
   (3) 試推導極小統計量 $X_{(1)}$之 pdf，並認出其分配名稱及參數。 (8 分)

3. 設 $\{X_i\}_1^n \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu, 1)$ 為一組來自常態分配之隨機樣本，設 μ 未知
   (1) (i)寫出 μ 之參數空間，(ii)以最大概似法(MLE)估計 μ，記為 $\hat{\mu}$，(iii)驗證 $\hat{\mu}$ 具有充分性。 (1+3+3 分)
   (2) 以顯著水準 α=0.05，檢定虛無假設 H_0: μ=0, vs. 對立假設 H_1: μ=1，試推導一最佳拒絕域(The best critical region)之檢定。 (8 分)
   (3) 以顯著水準 α=0.05，設 n 很大，以廣義概似比之近似檢定(GLR) H_0: μ=0, vs. H_1: $\mu \neq 0$ (5 分)

試題隨卷繳回