

1. 試以高氏消去法 (Gaussian Elimination) 解下列方程式組：

(1) 簡要說明此方法之步驟及原理【計分：5分】

$$(2) \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \quad \text{where} \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 12 & 7.8 & 4.6 \\ -5 & 3 & 3.3 \\ 2 & -3.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3], \quad \underset{\sim}{b}^T = [21.38 \quad -9.08 \quad 22.35] \quad \text{【計分：10分】}$$

2. 證明：三角矩陣 (Triangular Matrix) 之行列式值為主對角線各元素之乘積 ($\prod_{i=1}^n a_{ii}$)
【計分：15分】

3. 以 Diagonalization method 解下列方程式組：【計分：20分】

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - 6e^{-2t} \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-2t} \end{cases}$$

4. 試求出下列行列式：(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} = ?$ 【計分：5分】 (2) $D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} = ?$

【計分：10分】

5. 已知由向量 $u_1 = [7, -7, -14, 6]$, $u_2 = [5, -5, -10, 4]$, $u_3 = [2, -2, -4, 1]$, $u_4 = [3, -3, -6, 2]$, 與 $u_5 = [9, -9, -18, 7]$ 展成 (span) 某一線性空間 V 。試求 V 的一組基底 (basis) 與維度 (dimension)。
【計分：15分】

6. 若 $T: R^2 \rightarrow R^3$ 為一線性變換 (linear transformation), 且已知

$$T \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 試求 $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ?$ 【計分：10分】

(2) 試求 T 之秩 (rank)。【計分：5分】

(3) 試求 T 之零空間 (nullity), 即 $N(T)$ 。【計分：5分】

試題隨卷繳回