

1. 解下列微分方程式：【計分：10分】

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(1) = 1/e, \quad y'(1) = -1/e + e^2$$

2. 解下列微分方程式：【計分：10分】

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x$$

3. 以 Laplace Transformation 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -14$$

<註：本題限用題示方法求解。>

4. 定義一映射 $T: (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 為 $T(u, v, w) = (u+3v+2w, u+5v, 4w)$ 。讓 D^* 為第一卦限 (octant) 內的單位立方體， $D^* = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ 。假設 $D = T(D^*)$ ，求下列三重積分的值： $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ 【計分：10分】

5. (a) 求 A 矩陣行空間 (column space) 的一組正交基底 (orthonormal basis)：【計分：5分】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

- (b) 若 A 矩陣可分解成兩個矩陣， $A = QR$ 。其中 Q 矩陣的行 (column) 皆為正交基底構成，而 R 矩陣為上三角矩陣 (upper triangular)。 Q 、 R 分別為何？【計分：5分】

6. 求下列函數傅利葉級數展開式 (Fourier series expansion)：【計分：15分】

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

7. 考慮下列的邊界值問題 (Boundary-Value Problem)：

$$(1+2x^2+x^4) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(x+x^3) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

- (1) 試寫出此種邊界值問題的 Self-Adjoint Form。【計分：2分】
 (2) 試求此種邊界值問題的固有值 (Eigenvalue) 與固有函數 (Eigenfunction)。【計分：8分】
 <提示：可令 $x = \tan \theta$ ，並利用 Chain Rule。>
 (3) 試問此種邊界值問題之固有函數可以滿足何種正交性關係式 (Orthogonality Relation)? 【計分：2分】

8. 試求解下列的邊界值問題：【計分：18分】

$$\text{偏微分方程式：} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$\text{邊界條件：} u(0, t) = \sin t, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{初值條件：} u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

試題隨卷繳回