

納尼亞傳奇 - 黎明行者號



賈斯潘

尤提斯

愛德蒙

露西

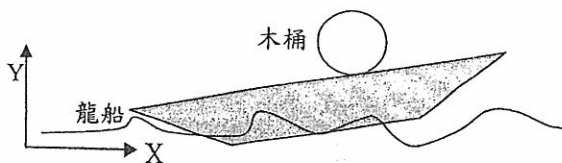
亞斯藍

黎明行者號

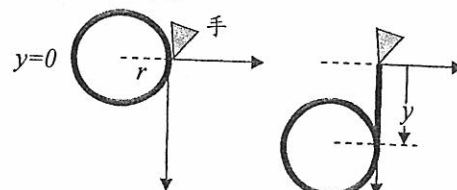
露西和愛德蒙住到表弟尤提斯家裡，當表弟正嘲笑他們捏造的神秘國度納尼亞時，牆上的畫中的船竟然開始隨波運動，一瞬間，他們又開始了新的冒險，進入了賈斯潘的國王的龍船「黎明行者號」，經過七個小島，一同尋找父王深愛的七個勳爵。歡迎你參加納尼亞的冒險，通過考驗的將進入「萬王之王」亞斯藍榮耀的國度(Narnia's Top-One University, NTU).....

請清楚標示答案題號

- 大海的波浪打在黎明行者號上，使船上下起伏作俯仰運動，尤提斯受不了大家的挑逗，躲在船上的木桶裡，木桶在甲板上開始純滾動(pure rolling)。假設圓筒型木桶的半徑為 R ，沿中心軸的轉動慣量(mass moment of inertia)為 I_B ，質量為 m ，甲板與木桶間的摩擦係數為 μ 。將龍船視為一剛體，當時總質量為 M ，在海面中上下運動的速度為 \dot{Y} ，加速度為 \ddot{Y} ，龍船朝 X 方向等速前進，在 Z 方向沿質心的轉動慣量為 I_D ，船身俯仰(pitch)運動的角速度與角加速度分別以 $\dot{\theta}$ 及 $\ddot{\theta}$ 表示。船身滾轉(roll)與偏擺(yaw)與側行(Z 方向)運動暫時忽略。
 - (5%) 若 \dot{Y} 、 \ddot{Y} 、 $\dot{\theta}$ 及 $\ddot{\theta}$ 都可量測，請寫出船體的運動方程式，並求出在任何瞬間船體受到海浪波動的合力與力矩。
 - (5%) 定出慣性座標及船身轉動座標，以「船身轉動座標」寫出木桶質心絕對位置向量、速度向量、及加速度向量。
 - (5%) 畫出木桶受力向量圖，寫出木桶運動方程式，並編上方程式號碼。
 - (5%) (a) 請寫出所有已知與未知變數，哪些編號的方程式可以計算這些未知數，若需要額外的方程式，請在這裡補齊，(b) 說明你的方程式是線性或非線性方程式，並說明(不用解)如何解出變數(如 \dot{Y} 、 \ddot{Y} 、 $\dot{\theta}$ 或 $\ddot{\theta}$)對時間的函數。
- 在聲音之島上，魔法師向大家由上而下展開一卷東方海洋圖，手持羊皮上端位置不變，如圖二，由羊皮捲在黃金做成的轉軸上，金轉軸加上羊皮的質量共為 m_0 ，金轉軸加上羊皮的的轉動慣量為 I_R 。羊皮單位長度的質量為 ρ ，為了簡化計算，羊皮厚度 t 遠小於金轉軸半徑 r ($t \ll r$)。
 - (5%) 金轉軸沿羊皮滾下時，質心受重力隨位置 y 的變化量為何?
 - (5%) 金轉軸沿羊皮滾下時，轉動慣量隨位置 y 的變化量為何?
 - (10%) 若起始位置為 $y=0$ ，寫出金轉軸沿羊皮滾下時，在任何位置 y 的運動方程式。
 - (10%) 若忽略羊皮質量，金轉軸滾下過程中，羊皮的張力為何?



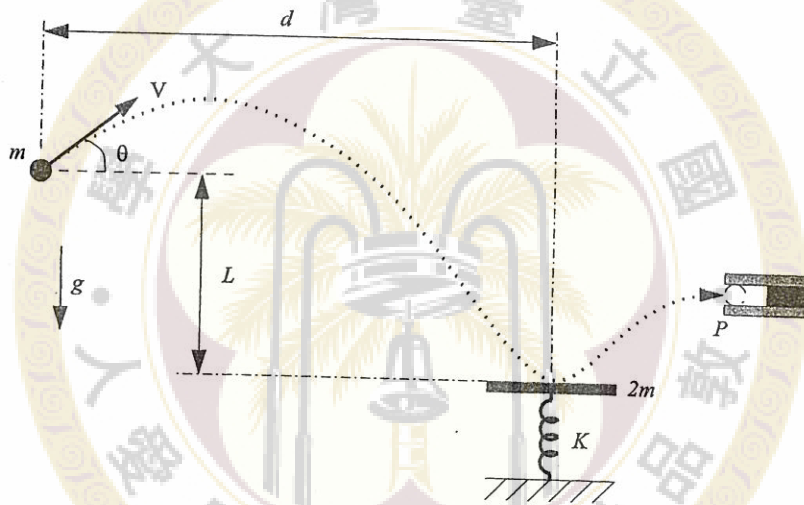
圖一、木桶在龍船上滾動示意圖。



圖二、金轉軸起始位置及沿羊皮滾下之任意位置圖。

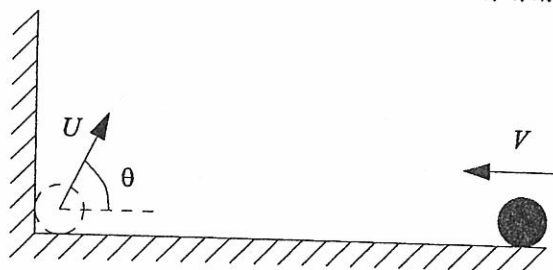
見背面

3. 黎明行者號來到「龍島」，愛德蒙必須將一個質量為 m 的球準確地投擲到預定的目標，以啟動一個開關。如圖三所示，愛德蒙將一個質量為 m 的球以水平線夾角 θ ，速度為 V 丟出，假設這顆球沿著如圖中軌跡飛行，先與一個質量為 $2m$ 的靜止平台碰撞再反彈前進，此平台與投擲點的垂直距離為 L 。(假設重力加速度為 g ，不考慮空氣阻力)
- (1) (5%) 請計算這顆球與平台碰撞前的水平飛行距離 d ，以及這顆球在碰撞前的垂直方向速度。
 - (2) (5%) 假設碰撞的回復係數 (coefficient of restitution) 為 e ，碰撞的時間極短，請計算在碰撞後瞬間球及平台的垂直方向速度。
 - (3) (5%) 請計算碰撞前後的能量損耗。
 - (4) (5%) 在平台下接一個彈性係數為 K 的線性彈簧，請計算碰撞後，平台最多可以再將彈簧壓縮多少長度？請注意在碰撞前彈簧已被平台壓縮一定長度。
 - (5) (5%) 假設這顆球在碰撞後再反彈前進，以水平方向進入目標 P ，請計算 P 與投擲點的垂直距離。



圖三、投擲物體質量為 m 的球投擲到預定目標。

4. 一行人搭著黎明行者號來到「星辰島」，在島上露西將一個質量為 m ，半徑為 r ，均勻實心球體，以 V 的速度丟向牆壁。如圖四所示，假設這顆球在水平面上純滾動，沒有滑動，球撞擊垂直牆壁的瞬間，牆壁施予球一個理想衝量 (ideal impulse)，之後球以水平線夾角 θ 回彈，並且停止轉動。
- (1) (5%) 請證明此均勻實心球體對質心的轉動慣量為 $I = 0.4mr^2$ 。
 - (2) (5%) 請計算撞擊後瞬間球的速度 U 。
 - (3) (5%) 請計算撞擊前後的能量損耗。
 - (4) (5%) 請計算牆壁與球之間所需的最小摩擦係數。
 - (5) (5%) 假設球在回彈後，經過幾次彈跳後，往回作純滾動，沒有滑動，請計算其滾動的角速度。



圖四、往牆壁丟球。