I、 **個案研究（每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫 無解 。）**

欲探究 A、B 兩種促銷方式對營收的影響，乃隨機抽出同質性極高之同一集團的 40 家超商，進行完全隨機實驗設計，得各商家一季的營收分別：A 為 X_i，B 為 Y_i，$i=1,2,\cdots,20$。(顯著水準 $\alpha=0.05$)

■ 假設此資料適合有母數統計分析，經 Microsoft Excel 求得下列部份電腦報表：

F 檢定：兩個常態母體變異數的檢定

促銷方式	A(1)	B(2)
變異數	$S^2(X)=374.3789$	$S^2(Y)=763.7342$
F 統計	$F_0=a$	
臨界值：$F_{(0.975)}$	0.396	

t 檢定

促銷方式	A(1)	B(2)
平均數	$\overline{X}=336.80$	$\overline{Y}=320.45$
變異數	$S^2(X)=374.3789$	$S^2(Y)=763.7342$
假設的均數差	0	
t 統計	$t_0=b$	
$P(t>\|t_0\|)$	0.036	
臨界值：$t_{(0.025)}$	2.024	

- 兩個常態母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 的檢定：依 F 檢定的檢定統計量 $F_0=a=$ __(1)__ 與臨界值 0.396 作比較；或依 Bartlett's Test 之檢定統計量 $B=2.3043$ 與自由度 $v=$ __(2)__ 的臨界值 3.841 作比較，皆可得結論：不拒絕虛無假設 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$。
- 已知兩個常態母體變異數可能相等，求算檢定統計量 $t_0=b=$ __(3)__ 與臨界值 2.024 作比較，結論：拒絕虛無假設 $H_0:\mu_1=\mu_2$，表示 A、B 兩種不同促銷方式對超商的平均營收 μ_1、μ_2 可能有影響。此 t 檢定的自由度 $v=$ __(4)__ 。
- 若 $H_0:\mu_1=\mu_2$ 的檢定改採 One-way ANOVA 的 F 檢定，可求得已解釋變異數 MSR = __(5)__ ，檢定統計量 $F_0=$ __(6)__ 與臨界值 __(7)__ 作比較而有相同的檢定結論。
- 若檢定的統計假設建立為：虛無假設 $H_0:\mu_1-\mu_2\le 20$、對立假設 $H_1:\mu_1-\mu_2>20$，則可得檢定統計量 $t_0=$ __(8)__ 與臨界值作比較，而對虛無假設 H_0 下結論。
- 兩個母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 之比的 95%信賴區間為： __(9)__ $\le\sigma_1^2/\sigma_2^2\le$ __(10)__ ，依此信賴區間估計，可以檢定虛無假設 $H_0:\sigma_1^2=0.5\sigma_2^2$。
- 依 Scheffe 區間估計法，可求得平均數差的 95%信賴區間為： __(11)__ $\le\mu_1-\mu_2\le$ __(12)__ ，以檢定虛無假設 $H_0:\mu_1=\mu_2$。
- 依 Bonferroni 區間估計法，可求得平均數差的 95%信賴區間為： __(13)__ $\le\mu_1-\mu_2\le$ __(14)__ ，以檢定虛無假設 $H_0:\mu_1=\mu_2$。此估計法有關之抽樣分配的動差法偏態係數 $\beta_1=$ __(15)__ ，峰態係數 $\beta_2=$ __(16)__ >3，即此抽樣分配的峰態為高狹峰。

■ 若為研究需要而作無母數統計分析。令採用 A、B 兩種不同促銷方式之超商營收的中位數為 η_1、η_2，40 家超商營收經 Microsoft Excel 求算，而得下列 Kruskal-Wallis 檢定法的部份電腦報表為：

見背面

A 促銷之 Rank Sum R_1	(17)
B 促銷之 Rank Sum R_2	343
H Stat	(18)
P-value	0.070

- 依 Kruskal-Wallis 檢定法的機率值 P-value = (19) 與 $\alpha = 0.05$ 作比較，結論： (20) 虛無假設 $H_0: \eta_1 = \eta_2$。此檢定法之檢定統計量 H 分配的期望值 $E(H) =$ (21) ，變異數 $\sigma^2(H) =$ (22) 。
- 依 Mann-Whitney-Wilcoxon 檢定法，由機率值 P-value = (23) 與 $\alpha = 0.05$ 作比較，而對虛無假設 $H_0: \eta_1 \geq \eta_2$ 下結論。
- 令 Kruskal-Wallis 檢定法之檢定統計量 H 的標準化隨機變數為 W，則 H 與 W 的共變數 $Cov(H, W) =$ (24) 。
- Kruskal-Wallis 檢定法之等級和 R_1、R_2 的 Spearman 等級相關係數 $r_S =$ (25) 。

II、問答與計算題（共 50 分）

1. 設 X_n 為卜瓦松 Poisson($n\lambda$)分配，$n = 1,2,\cdots$。

   (1) 當 n 固定，試寫出 X_n/n 之精確分配(exact distribution)。(5 分)

   (2) 當 n 趨近無限大時，試驗證 X_n/n 將機率收斂(converge in probability)至 λ。(5 分)

   (3) 若 $\lambda = 2$，試計算 n 使 $P\left(\left|X_n/n - 2\right| > 0.01\right) < 0.05$ 成立。(5 分)

2. 設 X 與 Y 為獨立同態(i.i.d.) N(0,1) 之隨機變數，令 $S = X + Y$，

   (1) 請計算 (X,S) 之聯合機率密度函數(joint pdf)，並認出此聯合分配之名稱及參數。(5 分)

   (2) 請計算 S 之動差母函數 mgf，並註明 S 之分配名稱及參數。(5 分)

   (3) 計算 X 與 S 之相關係數 $\rho_{X,S}$，X 與 S 是否無相關？是否獨立？(5 分)

3. 設 $\{X_i\}_1^n$ 為一組來自柏拉圖 Pareto(α,σ)分配之隨機樣本，其機率密度函數(pdf)為

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sigma}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha-1} & x \geq \sigma \\ 0 & \text{其他 } x \end{cases}$$

   試分別求參數(α,σ)之

   (1) 動差估計元($\hat{\alpha}_{MME}, \hat{\sigma}_{MME}$)。(4 分)

   (2) 最大概似估計元($\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\sigma}_{MLE}$)。(6 分)

   (3) 若 $\alpha = 1$，令 $X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$，試推導 $X_{(1)}$ 之機率密度函數(pdf)，並註明其分配名稱及參數。(10 分)