I、 個案研究（每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫 無解 。）

欲探究 A、B 兩種不同包裝對商品銷售量的影響，乃由申請參與的商家中，隨機抽出 20 家，進行集區實驗設計，得各商家一週的銷售量分別：A 為 X_i，B 為 Y_i，$i=1,2,\cdots,20$。(顯著水準 $\alpha=0.05$)

■ 假設此資料適合有母數統計分析的條件，經 Microsoft Excel 求得下列部份電腦報表：

包裝	A	B
平均數	$\overline{X}=343.8000$	$\overline{Y}=311.7000$
變異數	$S^2(X)=382.5895$	$S^2(Y)=1798.4316$
皮耳森相關係數	$r=0.2588$	
假設的均數差	0	
t 統計	$t_0=a$	
$P(t>\lvert t_0\rvert)$	0.0028	
臨界值：$t_{(0.025)}$	2.093	

- 令差額 $D_i=X_i-Y_i$ 的算術平均數為 $\overline{D}$，求得母數標準誤 $\sigma(\overline{D})=\sigma(D)/\sqrt{n}$ 的估計標準誤 $S(\overline{D})=$ __(1)__，檢定統計量 $t_0=a=$ __(2)__ 與臨界值 2.093 作比較，結論：__(3)__ (拒絕或不拒絕)虛無假設 $H_0:\mu(D)=0$。此 t 檢定的自由度 $v=$ __(4)__。
- 若 $\mu(D)$ 檢定改採 Two-way ANOVA 的 F 檢定，可求得包裝的已解釋變異數 MSR = __(5)__，檢定統計量 $F_0=$ __(6)__ 與臨界值 __(7)__ 作比較而有相同的檢定結論。
- 若 $\mu(D)$ 檢定的統計假設建立為：虛無假設 $H_0:\mu(D)\geq 20$、對立假設 $H_1:\mu(D)<20$，則可得檢定統計量 $t_0=$ __(8)__ 與臨界值作比較而可對虛無假設 H_0 下結論。
- 已知皮耳森(Pearson)相關係數 $r=0.2588$，若統計假設建立為：虛無假設 H_0：兩包裝的銷售量無關、對立假設 H_1：兩包裝的銷售量有關，則可求得檢定統計量 $t_0=$ __(9)__ 與臨界值 2.101 作比較，結論：__(10)__ H_0。此 t 檢定的自由度 $v=$ __(11)__。
- 由相關係數 r 可求得因變數 Y 對自變數 X 的樣本迴歸係數 $b_1=$ __(12)__，進一步求得母數迴歸係數 β_1 的檢定統計量 $F_0=$ __(13)__ 與臨界值作比較，結論：__(14)__ $H_0:\beta_1=0$。
- 經集區的 F 檢定發現：不同商家對銷售量可能沒有影響，因此將 Two-way ANOVA 改為 One-way ANOVA，則部分 One-way ANOVA 表成為：

變異來源	SS	自由度
包裝	(15)	(16)
誤差	(17)	(18)

■ 若為研究需要而作無母數統計分析，經 Microsoft Excel 求得下列部份電腦報表：

Friedman 檢定

A 包裝 Rank Sum R_A	(19)
B 包裝 Rank Sum R_B	c
Fr Stat(χ_r^2)	(20)
P-value	0.0254

Sign 檢定（Difference = X_i-Y_i）

Positive Differences 個數	b
Negative Differences 個數	5
Zero Differences 個數	0
z Stat（不校正）	± (21)

- 依 Friedman 檢定法，因機率值 P-value=__(22)__ $<\alpha=0.05$ 而拒絕虛無假設 $H_0:\eta_D=0$，即 A、B 兩種不同包裝對商品銷售量可能有影響，Difference 分配的中位數 η_D 可能不為 0。
- 令 Friedman 檢定法之檢定統計量 χ_r^2 的標準化隨機變數為 W，則 χ_r^2 與 W 的共變數 $\mathrm{Cov}(\chi_r^2, W)=$ __(23)__。
- 依 Sign 檢定法，因機率值 P-value=__(24)__ 與 $\alpha=0.05$ 作比較，而可對虛無假設 $H_0:\eta_D\geq 0$ 下結論。
- 兩包裝之銷售量的 Spearman 等級相關係數 $r_S=0.1708$，可求得檢定統計量 $t_0=$ __(25)__ 與臨界值作比較，結論：不拒絕虛無假設 H_0:兩包裝的銷售量無關。

II、問答與計算題（共 50 分）

1. 設 X 與 Y 為兩個獨立的 $\mathrm{Gamma}(1,\lambda=1)$ 與 $\mathrm{Gamma}(3,\lambda=1)$ 隨機變數，令 $Q=Y/(X+Y)$，$S=X+Y$，
   (1) 試計算 (Q,S) 之聯合分配(joint pdf)，並說明 Q 與 S 是否獨立？（5 分）
   (2) 試求 Q 之機率密度函數，並註明 Q 之分配名稱及參數。（5 分）
   (3) 試求 S 之動差母函數，並註明 S 之分配名稱及參數。（5 分）

2. 令 X_n 為 $B(n,p)$ 二項分配，$n=1,2,\cdots$。
   (1) 當 n 固定，試寫出 X_n/n 之精確分配(exact distribution)。（5 分）
   (2) 當 n 趨近無限大時，試驗證 X_n/n 將機率收斂(converge in probability)至 p。（5 分）
   (3) 若 $p=0.5$，試計算 n 使 $P\left(\left|X_n/n-0.5\right|>0.01\right)<0.05$ 成立。（5 分）

3. 設 $\{X_i\}_1^n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,\sigma^2)$ 為一組來自常態分配之隨機樣本，$\sigma^2>0$ 未知。
   (1) (i)求 σ^2 之一充分統計量，記為 S，(ii)並驗證 S 確實具有充分性。（5 分）
   (2) (i)求 X_i 之標準差 σ 的最大概似估計元(MLE)，記為 $\hat{\sigma}$，(ii)並寫出 $\hat{\sigma}$ 之漸近分配，需註明分配名稱及參數。（5 分）
   (3) (i)以顯著水準 α $(0<\alpha<1)$，檢定虛無假設 $H_0:\sigma=1$ vs. 對立假設 $H_1:\sigma=2$，試推導一最強力檢定(the most powerful test)，(ii)試說明此檢定具有何種性質？（10 分）

試題隨卷繳回