

※ 請依序作答，並標明作答之部份及其題號。

第一部份：5 大題填充題，包括 14 個小題。每小題 3 分，請務必依小題順序作答，將答案依序填入答案卷內。

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$ ， A 矩陣的秩(rank)為何？(1) A 矩陣的特徵值

(eigenvalue) 為何？(2) A 矩陣的特徵向量(eigenvector)為何？

(3) _____

2. 設 A 為 n 階方陣 (square matrix)，如果 A 矩陣的反矩陣 (inverse matrix) 不存在則稱 A 為何種矩陣？(答案請以英文作答) (4) _____

3. 設 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 為一 n 階方陣，若對於任意 $n \times 1$ 非全為零的行向量 x ，滿足 $x^T A x > 0$ ，則稱 A 為何種矩陣？(答案請以英文作答) (5) _____

4. 若將 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ 分解成一個下三角矩陣 (L) 與一個上三角矩陣 (U) 的

乘積 (LU 分解)，則 $L = ?$ (6) $U = ?$ (7) _____

5. 求下列微分方程式的解：

(a) $y' + y = (xy)^2$ (8) _____

(b) $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$ (9) _____

(c) $y'' - 4xy' + 4x^2y = xe^{x^2}$ (10) _____

(d) $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$ (11) _____

(e) $y(x) = x^2 + \int_0^x y(u) \sin(x-u) du$ (12) _____

(f) $(x+1)y'' + xy' - y = (x+1)^2$ (13) _____

(g) $x^2(xdx + ydy) + y(xdy - ydx) = 0$ (14) _____

見背面

第二部份：7 題計算題，請務必依題目順序作答。

1. $f(x, y) = e^{2x^2+y^2} + 1$ ，請求此函數的 Hessian 矩陣。(7 分)

2. 求 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 之反矩陣。(8 分)

3. 若 $S = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$ ，對 $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S, c \in R$ 。定義 (a_1, a_2)

$\oplus (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ 且 $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$ 試判斷 S 是否為向量空間。(5 分)

4. 試對 $A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 24 \\ 8 & 20 & 20 \\ 24 & 20 & 44 \end{bmatrix}$ 作喬列斯基分解(Cholesky decomposition)。(10 分)

5. 求解下列線性微分方程式 $\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 - 4y_3 \\ y_3' = -3y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}$ 。(12 分)

6. 請用 Laplace 變換解下列微分方程式：

$$y'' + a^2y = F(x), y(0) = 1, y'(0) = -2. \quad (8 \text{ 分})$$

7. 假設 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，請用級數解下列微分方程式： $y'' + xy' + y = 0$ 。(8 分)

試題隨卷繳回