

1. 解下列微分方程式：【計分：10分】

$$2(3z+1)^2 y'' + 21(3z+1)y' + 18y = 0$$

2. 以 Laplace Transformation 解下列微分方程式：【計分：15分】<註：本題限用題示方法求解。>

$$y'' + 6y' + 8y = e^{-3t} - e^{-5t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

3. 解下列微分方程式：【計分：10分】

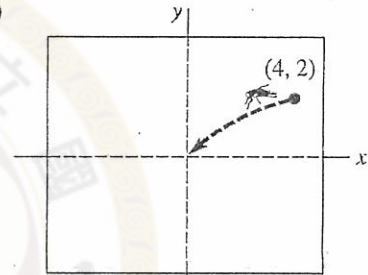
$$ye^x dx + (2y + e^x) dy = 0$$

4. 求下列微分方程式之通解：【計分：15分】

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \sqrt{2x} e^{2x}$$

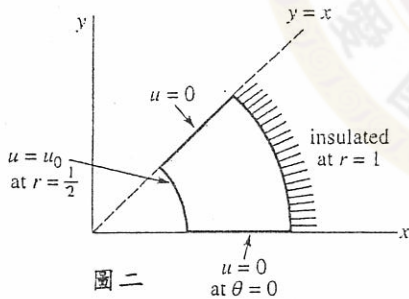
5. 參考圖一所示的矩形金屬板。金屬板上 (x, y) 點處的溫度為 $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$ 。

(1) 此金屬板上溫度最低點位於何處？【計分：1分】(2) 金屬板上 $(4, 2)$ 點處的昆蟲為了能儘速逃離此高溫點，試問昆蟲應朝哪個方向跑？假設昆蟲不會飛。【計分：3分】(3) 試求此隻昆蟲由 $(4, 2)$ 點跑至溫度最低點的最佳路徑向量方程式。假設此最佳路徑的位置向量方程式為 $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 。【計分：6分】

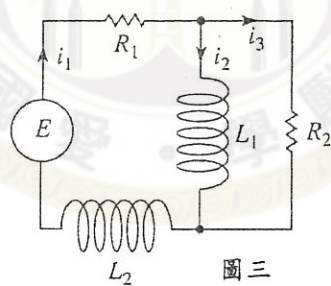


圖一

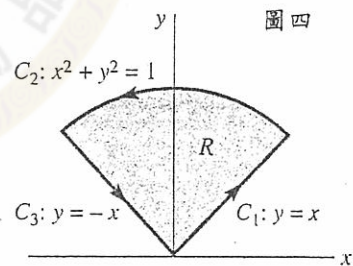
6. 參考圖二所示的金屬板。(1) 試寫出可描述此金屬板穩態溫度分佈函數 $u(r, \theta)$ 的偏微分方程式及其邊界條件。【計分：3分】(2) 試求出此金屬板的穩態溫度分佈函數 $u(r, \theta)$ 。【計分：12分】



圖二



圖三



圖四

7. 參考圖三所示的電路。(1) 假設 $\mathbf{I} = [i_1(t) \ i_2(t)]^T$ 。試寫出可描述此電路之電流 $i_1(t)$ 與 $i_2(t)$ 的微分方程式系統，即 $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{E}$ 。【計分：3分】(2) 若 $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 1 \text{ H}$, $E(t) = 100\sin t \text{ V}$, $i_1(0) = 0$ 與 $i_2(0) = 0$ ，試以矩陣理論的參數變異 (variation of parameters) 法求解此系統方程式。【計分：12分】<註：本題限用題示方法求解。>

8. 試求由力 $\mathbf{F} = (-16y + \sin x^2)\mathbf{i} + (4e^y + 3x^2)\mathbf{j}$ 沿著圖四所示之簡單封閉曲線 C 所做的功，其中 C 由 C_1 , C_2 , 及 C_3 組成。【計分：10分】