I、填充題　（每格 2 分，共 50 分。請按空格編號，依序作答。若沒有適當答案，請填寫 無解 。）

- 設母體分配為：

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-x/2} \qquad x\ge 0$$

由此母體隨機抽取一組樣本大小 $n=2$ 的樣本 X_1,X_2，今為研究需要而令新隨機變數 $Y=X_1+X_2$ 及 $W=2X_1$，則可求得

  - Y 分配的期望值 $E(Y)=$ __(1)__，變異數 $Var(Y)=$ __(2)__，變異係數 $CV=$ __(3)__。
  - 隨機變數 Y 與 W 的共變數 $Cov(Y,W)=$ __(4)__，Pearson 積差相關係數 $\rho_{YW}=$ __(5)__。

- 設母體分配是母數為 μ 的 Poisson 分配，即 $X\sim Poisson(\mu)$。欲檢定母數 $\mu=0.6$ 是否變大，而
  - 隨機抽取樣本大小 $n=10$ 的樣本 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$，令樣本和 $Y=\sum_{i=1}^{10}X_i$ 及拒絕區 $C=\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i>9\right\}$，則可求得此檢定之型 I 錯誤發生的機率 $\alpha=$ __(6)__。若假設母數 $\mu=1$ 時，此檢定之型 II 錯誤發生的機率 $\beta=$ __(7)__。
  - 隨機抽取樣本大小 $n=36$ 的樣本，得樣本平均數 $\overline{X}=\sum_{i=1}^{36}X_i/36=0.5$。令顯著水準 $\alpha=0.05$，求得標準常態隨機變數 $Z=$ __(8)__ 與臨界值 1.645 作比較，而不拒絕虛無假設 $H_0:$ __(9)__。若期盼誤差 e' 為原有誤差 $|\overline{X}-\mu|=e$ 的 $1/2$，則所需樣本大小變為 $n'=$ __(10)__。

- 為探討 A、B、C 三種不同促銷方式對營收的影響，乃隨機抽出同一財團的 15 家超商($n=15$)，進行完全隨機實驗設計，得採用不同方式促銷之各 5 家超商的營收依序為：

A　A　A　A　A　B　B　B　B　B　C　C　C　C　C

  - 試以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定，採 A、B、C 促銷方式之超商營收中位數 η_A、η_B、η_C 是否相等？Kruskal-Wallis 檢定統計量 $H=$ __(11)__ 與臨界值 5.72 作比較，而拒絕虛無假設 $H_0:$ __(12)__。
  - 若依據一因子分類變異數分析法之已解釋變異(處理變異) SSR、總變異 SST 的定義，可求得 $SSR=$ __(13)__，$SST=$ __(14)__，而能驗證 Kruskal-Wallis 檢定統計量 H 與 n、SSR、SST 的關係公式為： __(15)__。

- 欲探究 A、B 兩種包裝對銷售量的影響，乃由申請參與的商家中，隨機抽出 30 家，進行集區實驗設計，得一週的銷售量為 Y_{ij}（千個），$i=A,B$，$j=1,2,\cdots,30$。令各商家銷售量差額 $D_j=Y_{Aj}-Y_{Bj}$，9 個帶負號之差額的等級和 $W(-)=103.5$，假設差額分配不為常態分配，試以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定，A、B 兩種包裝之銷售量差額的中位數 η_D 是否為 0？
  - 依 Wilcoxon 檢定：Wilcoxon 檢定統計量 $W=$ __(16)__ 與臨界值 $W_{(0.025)}=137$ 作比較，或依標準常態隨機變數 $Z=$ __(17)__ 與臨界值 $-Z_{(0.025)}=-1.96$ 作比較，而拒絕虛無假設 $H_0:$ __(18)__。
  - 依符號檢定：檢定統計量 $S=$ __(19)__ 與 $S_{(0.0214)}=9$ 作比較，或依標準常態隨機變數 $Z=$ __(20)__ 與臨界值 -1.96 作比較，而拒絕虛無假設 H_0。

- 隨機抽訪風景區遊客 400 位，得其對甲設施之態度反應的次數分配為：

態度反應	極不滿意	不滿意	無所謂	滿意	極滿意	和
人數	80	72	60	88	100	400

  - 試以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定，此風景區遊客對甲設施的態度是否有特別的態度反應？
依卡方檢定：檢定統計量 $\chi^2=$ __(21)__ 與臨界值 9.488 作比較，而拒絕虛無假設 $H_0:$ __(22)__。
依 Kolmogorov-Smirnov 檢定：檢定統計量 $D=$ __(23)__ 與 0.068 作比較，亦拒絕虛無假設 H_0。
  - 令此風景區遊客中對甲設施表示"滿意或極滿意"者所佔的比例為 p，$p>0.5$？試以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定之。
檢定統計量 $Z=$ __(24)__ 與臨界值 1.645 作比較，而不拒絕虛無假設 $H_0:$ __(25)__。

見背面

II、問答與計算題　（共 50 分）

1. 設 $X \sim \text{Exp}(1)$為指數分配(參數為 1)。
   (1) 定義隨機變數 $Y = k$，若且唯若 $k \le X < k+1$，$k = 0,1,2,\cdots$，試 (i)計算 Y 之機率質點函數(probability mass function)，(ii)並註明分配名稱與參數。(5 分)
   (2) 試分別推導(derive)隨機變數 X 與 Y 均具有“無記憶性質”(memoryless property)。(10 分)

2. 令 X 之機率密度函數(probability density function，pdf)為：

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他範圍} \end{cases}$$

   (1) 求常數 c 使 $f(x)$ 為一良好定義之 pdf。(6 分)
   (2) 計算 X 之期望值 $E(X)$ 及變異數 $\text{Var}(X)$。(6 分)
   (3) 計算 $P\{|X - E(X)| \ge 1\}$之機率上界值。(8 分)

3. 設 $\{(X_i, Y_i)\}_1^5 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{BVN}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 為一組來自二元常態分配之隨機樣本，設此 5 個參數均未知，
   (1) 令 $T_i = X_i - Y_i$，$i = 1,2,3,4,5$，試寫出每一 T_i 之分配，需註明分配名稱及參數。(5 分)
   (2) 試求 (i)參數$(\mu_1 - \mu_2)$之某一不偏估計元(unbiased estimator)，記為 $\hat{\theta}$，(ii)並計算其變異數 $\text{Var}(\hat{\theta})$。(4 分)
   (3) 以顯著水準α，檢定虛無假設$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs. 對立假設$H_1: \mu_1 \ne \mu_2$，試寫出檢定統計量及拒絕域。(6 分)