

1. 求下列微分方程式之通解：【計分：10分】

$$y'' + 9y = 3 + 2e^x + \sin x$$

2. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$x - xy - y' = 0$$

3. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$x^3 y''' - x^2 y'' - 7xy' + 16y = 9x \ln x, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 18, \quad y''(1) = 65$$

4. 以 Laplace Transformation 解下列微分方程式：【計分：10分】

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

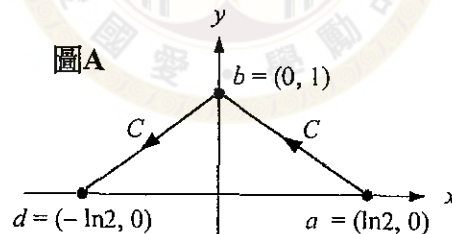
5. (1) 已知函數 $f(x) = x$, $0 < x < \pi$ 。此函數可展開成正交函數之級數，其型式為

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi. \text{ 試求係數 } A_n = ? \text{ 【計分：5分】 (2) 級數展開式 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

在區間 $(0, \pi)$ 內均成立，試證明： $\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$ 。【計分：5分】 (3) 由(1)及(2)小題之結果，試求

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = ? \text{ 【計分：5分】}$$

6. 試求 $\int_C e^x \cos y dx - e^x \sin y dy = ?$ 其中積分曲線 C 為由點 $a = (\ln 2, 0)$ 至點 $b = (0, 1)$ 再接至點 $d = (-\ln 2, 0)$ 之片段直線所組成，如圖 A 所示。【計分：10分】



7. 已知兩矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 及 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求此二矩陣乘積之行列式值，即求

$$\det(AB) = ? \text{ 【計分：10分】}$$

8. 試求解下列的偏微分方程式：【計分：15分】

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-x}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0$$

$$\text{邊界條件：} u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\text{初值條件：} u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq 4$$