1. 請判斷下列何者為奇異矩陣(singular matrix)？需詳細說明判斷的理由。(15%)

$$(1)\begin{bmatrix}1&2&6\\2&0&8\\4&8&24\end{bmatrix}\quad(2)\begin{bmatrix}1&1&6\\2&0&12\\4&3&24\end{bmatrix}\quad(3)\begin{bmatrix}0&1&6\\2&0&12\\4&3&0\end{bmatrix}\quad(4)\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&12\\0&3&0\end{bmatrix}\quad(5)\begin{bmatrix}0&1&0\\2&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

2. 請證明平面上的任一向量與該平面的法向量之內積(inner product)恆為零。(15%)

3. 假定$\mathbf{R}_1$及$\mathbf{R}_2$分別為兩個同維度的正交矩陣(orthogonal matrix)：
   (1) 證明$\mathbf{R}_1^{-1}=\mathbf{R}_1^{T}$。(5%)
   (2) 證明$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$亦為正交矩陣。(10%)
   (3) 若給定三個矩陣$\mathbf{M}_w=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos w&\sin w\\0&-\sin w&\cos w\end{bmatrix}$、$\mathbf{M}_\phi=\begin{bmatrix}\cos\phi&0&-\sin\phi\\0&1&0\\\sin\phi&0&\cos\phi\end{bmatrix}$、$\mathbf{M}_k=\begin{bmatrix}\cos k&\sin k&0\\-\sin k&\cos k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，
   請判斷$\mathbf{M}=\mathbf{M}_w\mathbf{M}_\phi\mathbf{M}_k$是否也為正交矩陣，需詳述理由。(15%)
   (4) 若上式中$w=-2.3^o$、$\phi=1.2^o$、$k=12.6^o$，且某一向量$\bar{\mathbf{x}}=\{200.001\quad 398.214\quad -623.682\}^T$、$s=1.003$，試求向量$\bar{\mathbf{y}}=s\mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}$之向量長度為何（需計算至小數點後第三位）。(5%)

4. 給定矩陣$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2.28&-0.96\\-0.96&1.72\end{bmatrix}$：
   (1) 請計算矩陣的特徵值(eigenvalues)與相對應的特徵向量(eigenvectors)。(10%)
   (2) 請計算$\mathbf{A}^{-1}$以及$\mathbf{A}^{8}$各為何。(10%)

5. 假定方陣$\mathbf{B}$為任意之非奇異矩陣(nonsingular matrix)：
   (1) 證明矩陣$\mathbf{N}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$為對稱矩陣(symmetric matrix)。(5%)
   (2) 證明矩陣$\mathbf{N}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$為可逆(invertible)且其跡（trace）必大於零。(10%)

試題隨卷繳回