

1. 證明：如果 $X$ 有「行滿秩」(full column rank)，則 $X'X$ 是一個正定矩陣(positive definite matrix)。如果 $Y$ 有「列滿秩」(full row rank)，則 $YY'$ 是一個正定矩陣。(5分)
2. 請證明 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的特徵向量(eigenvector)的形式為 $\begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{bmatrix}$ 跟 $\begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{bmatrix}$ ，其中 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是特徵值(eigenvalue)。並請驗證當 $a = d$ 的時候， $2a = \lambda_1 + \lambda_2$ 。  
(10分)
3. 如果 $G$ 是矩陣 $X'X$ 的一個廣義反矩陣(generalized inverse)，設 $b = GX'y$ ， $s = (y - Xb)'(x - Xb)$ 。證明  $s = y'y - b'X'y$ 。  
(10分)
4. 求極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 。(5分)
5. 求極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ ， $e$ 是自然對數的底數。(5分)
6. 求積分 $\int_1^2 2x^3 e^{x^2} dx$ ， $e$ 是自然對數的底數。(5分)
7. 求積分 $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 。(5分)
8. 求積分 $\int \left( \frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx$ 。(5分)
9. 求  $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x-9}{x^2-12x+35}$ 。(5分)
10.  $y = \tan(x^2+5x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。(5分)
11.  $f(t)=3t^2p+5tq+9r$  且  $g(t)=p+4tq+3t^2r$ ，求 $(f+g)'(t)$ 。(5分)
12. 請畫出下列三條函數包圍之圖形(5分)，並計算其面積。(5分)  
 $x=0$ ， $x-y=-1$ ， $x^2+y^2=2$
13. 若一列空間(column space)包含下列兩向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  及  $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，且其零空間(null space)為  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，請建構一實數矩陣符合此條件。(5分)
14. 若一行空間(row space)包含下列兩向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  及  $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，且其零空間(null space)為  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，請建構一實數矩陣符合此條件。  
(5分)

見背面

題號： 333

國立臺灣大學 112 學年度碩士班招生考試試題

科目： 基礎數學

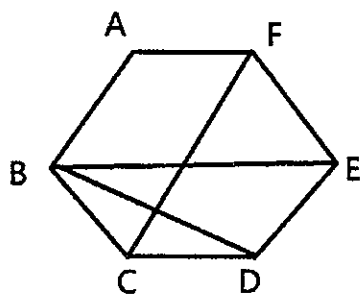
題號： 333

節次： 7

共 2 頁之第 2 頁

15. 一矩陣為  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ，請寫出其特徵向量(eigenvector)與特徵值(eigenvalue)。(5分)

16. 若六鄉鎮間的連接圖形如下，今年起一特殊病原體開始在這六鄉鎮中傳播，起始時在 A 點有三萬隻病原體，在 D 點有六千隻病原體。此病原體之特性為經過一小時後，必定離開原始鄉鎮前往隔壁鄉鎮，且其前往隔壁鄉鎮為一隨機事件，請依這些條件寫出轉移矩陣(5分)，當經過非常長的時間後，請問各鄉鎮的病原體數目各為多少?(5分)



試題隨卷繳回