

1. (15%)請找出常微分方程式  $xy' + \frac{2}{x}y = 4$  的一般通解(general solution)為何?若其中一組解有通過第一象限中的點(3,5)，此方程式的解為何?
2. (15%)請問常微分方程式  $y' + \frac{1}{x}y = 3x^2y^3$  是否有一般通解(general solution)?若有的話，請問此通解為何?若沒有的話，請說明為什麼。
3. (15%)起始值問題(initial value problem)在數學裡是很重要的應用，請找出下面起始值問題的正確解。

$$y'' + 2y' - 3y = 0; y(0) = 6, y'(0) = -2$$

4. (25%)矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$  請問

- (a) 矩陣 A 的轉置矩陣(transpose matrix)為何?
- (b) 矩陣 A 的行列式(Determinant)為何?反矩陣 (inverse matrix)為何?
- (c) 請說明矩陣 A 的三個行向量  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$  彼此之間有何關係。

5. (30%) 勒讓得方程式(Legendre's equation)可以有效處理球座標下海洋熱傳導的過程，標準型式如下

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0$$

$\mu$  可為任意常數，而且  $-1 < x < 1$ ，我們可將 Legendre's equation 改寫為

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{\mu}{(1-x^2)}y = 0$$

若這個方程式的解可寫為  $x$  的多項式

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

且通過原點(0,0)，請問

- (a)  $a_n$  與  $\mu$  之間有何關係?
- (b) 若已知  $\mu$  的量值，當  $n$  為奇數時， $a_n$  是否可以用  $n$  以及  $a_1$  表示形成一組遞迴數列?
- (c) 同上題(b)，當  $n$  為偶數時， $a_n$  是否可以用  $n$  以及  $a_0$  表示形成一組遞迴數列?