以下五個題目每題各 20 分，總分 100 分。作答時請務必清楚寫下計算與推論過程，否則不予計分。

問題 1. 給定可微函數 $f(x,y,z)$、$g(x,y)$ 與 $h(x,y)$ 滿足以下性質：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,1)=-15、\frac{\partial f}{\partial y}(1,3,1)=6、\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,1)=7、$$

$$g(3,1)=1、g(1,5)=1、g(5,1)=1、h(3,1)=3、h(1,3)=3、$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(3,1)=3、\frac{\partial g}{\partial x}(5,1)=8、\frac{\partial g}{\partial x}(1,5)=0、$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(3,1)=1、\frac{\partial g}{\partial y}(5,1)=5、\frac{\partial g}{\partial y}(1,5)=-2、$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(3,1)=-3、\frac{\partial h}{\partial x}(1,3)=11、\frac{\partial h}{\partial y}(3,1)=0、\frac{\partial h}{\partial y}(1,3)=-7。$$

令 $k(x,y,z)=f(g(z,y),h(y,x),y)$。計算 $\frac{\partial k}{\partial y}(3,1,5)$。

問題 2. 計算下述積分：

$$\int_0^\pi \frac{dx}{3+\sin^2 x}$$ （提示：考慮變數變換 $u=\tan x$。）

問題 3. 給定向量場

$$(P(x,y),Q(x,y)) := \left(2y+e^{xy},\ \frac{xy-1}{y^2}e^{xy}+5x\right)$$

與路徑 $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $(t\in[\pi/6,\pi/2])$，計算線積分 $\int_\gamma Pdx+Qdy$。

問題 4. 給定實數 $a>1$ 與 $b>0$，方程式 $a^x=|x|^b$ 有多少個相異實數解 x？答案可能取決於 a 與 b 的範圍，請針對所有情況作答並詳述理由。(提示：一個直接的想法是計算微分來了解函數 $f(x)=a^x-|x|^b$ 的極值與增減特性，就像畫函數的概略圖形時那樣，進而判斷解的個數；不過，經由解方程式 $f'(x)=0$ 來求極值並不比原本的問題容易。能否藉由考慮別的函數來回答原本的問題？)

問題 5. 假設 I 是一個含有 0 的開區間，f 是定義於 I 上的一個（無窮次可微）函數，並且 $y=f(x)$ 滿足方程式 $xy+1-y^7e^x=0$。請問 f 在 $x=0$ 是否發生局部極大值或局部極小值？請說明理由。