

I. 計算題，每題 5 分(共 35 分，請附上計算過程)

1. 二元隨機變數 X, Y 分配如下表。

	Y=1	Y=2	Y=3	Y=4
X=1	0.1	0	0	0
X=2	0.2	0.05	0.15	0
X=3	0.15	0.05	0.1	0.2

請求解 $E(X*Y^{0.5}|Y)$

- 隨機擲兩個公正骰子，其點數分別為 $\{a, b\}$ ，令 $X=\max(a, b)$ ， $Y=\min(a, b)$ 。請寫出 $E(Y|X=3)$ 的值。
- $\{X_1, X_2, \dots, X_{36}\}$ 為 36 個 i.i.d. $N(\mu_0, 1)$ 的隨機變數。虛無假說為平均數等於 3，亦即 $H_0: \mu_0=3$ ， $H_1: \mu_0 \neq 3$ 。若真實 $\mu_0=3.1$ ，請計算其檢定力(power)為何 ($\alpha=0.05$ ，雙尾檢定)?
- 台北市研究 A, B 和 C 三區居民的所得，每區各隨機抽樣 5 戶得到平均所得與標準差資料如下：

	A	B	C
平均所得	31	38	33
所得標準差	4	3	5

請用 one-way ANOVA 檢定虛無假說 $H_0: \mu_A=\mu_B=\mu_C$ ($F_{(\alpha=0.05)}=3.89$)

- 承上題，如果我們要檢定是否對立假說 $H_a: \mu_A > \mu_B = \mu_C$ 為真，並用 contrast test 檢定之，請問檢定結果是否拒絕虛無假說 ($t_{(\alpha=0.025)}=2.18$)
- 聯合機率密度函數 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 < x < a \text{ 且 } 0 < y < b \\ 0, & \text{其他範圍} \end{cases}$ 。 a 和 b 皆為固定常數。 $\varphi(y)$

為 y 的一般性函數，且令 $g(y) = \varphi(y)$ 為 $E[x - \varphi(y)]^2$ 極小化之下 y 的函數。請求解 $g(y)$ 。

- 蒐集 n 個獨立成對樣本，估計迴歸模型: $Y=a+bX+e$ 。 X 為非隨機的變數， e 為 i.i.d. 的常態分配， $E(e)=0$ ， $var(e)=\sigma^2$ 。請求解最大似法(MLE)之下的迴歸變異數估計式 $\hat{\sigma}^2$ 。

II. 是非題，每題 5 分(共 15 分，錯誤須說明並更正)

- 估計邏輯迴歸參數時，一般採用最大似法估計而不用最小平方方法的原因，是因為最小平方無法求解出參數估計值。
- 建立迴歸模型: $Y=a+bX+e$ ，White (1980)得迴歸估計式(Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator)並不會改變迴歸斜率估計值(b)，但是迴歸斜率的變異數($Var(b)$)大部份時候會變大。
- Winsorization 是處理資料有變異數異質性問題的一種方法。

III. 問答與演算題 (共 50 分)

- 設 X_1 與 X_2 為兩個獨立同態(i.i.d.)之 $Exp(\lambda=1)$ 的指數分配。另 $U=X_1+X_2$ ， $V=\frac{X_1}{X_1+X_2}$ 。

(1) 試證明 U 與 V 獨立。(5 分)

(2) 計算 V 之機率密度函數(pdf)(需認出分配名稱與參數)，以及期望值 $E(V)$ 。(10 分)

(3) 試求 U 之分配，需註明分配名稱及參數。(5 分)

- 設 $\{X_i\}_1^5 \stackrel{i.i.d.}{\sim} Pareto(\alpha, \sigma)$ 為一組來自 Pareto 母體之隨機樣本，其機率密度函數(pdf)為

$$f_X(x) = \begin{cases} (\alpha/\sigma)(x/\sigma)^{-\alpha-1}, & x \geq \sigma \\ 0, & \text{其他範圍。} \end{cases}$$

見背面

- (1) 試計算每一 X_i 之累積分配函數(cdf), $F_X(\cdot)$ 並檢驗 $F_X(\cdot)$ 為一良好定義之 cdf。(5 分)
- (2) 試計算此隨機變數之中位數(median)的 pdf。(5 分)
- (3) 試寫出參數向量 (α, σ) 之參數空間, 並計算 (α, σ) 之最大概似估計元, 記為 $(\hat{\alpha}, \hat{\sigma})$ 。(5 分)

3. 設 $\{X_i\}_{i=1}^{10} \stackrel{i.i.d.}{\sim} P(\lambda)$ 為一組來自卜瓦松(Poisson)分配之隨機樣本

- (1) 以 $\alpha = 0.05$, 試求 $H_0: \lambda=1$ vs. $H_1: \lambda=0.5$ 之最佳拒絕域, 並計算 α 之精準值及檢定力(power)。(10 分)
- (2) 於(1)中所作之檢定具有何種好的性質? 此性質係依據一有名的引理, 試述此引理名稱及內容。(5 分)

附表一：常態分配臨界值表

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
-4.00	0.00002	0.00002	0.00002	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003
-3.90	0.00003	0.00003	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00005	0.00005
-3.80	0.00005	0.00005	0.00005	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00007	0.00007	0.00007
-3.70	0.00008	0.00008	0.00008	0.00009	0.00009	0.00009	0.00010	0.00010	0.00010	0.00011
-3.60	0.00011	0.00012	0.00012	0.00013	0.00013	0.00014	0.00014	0.00015	0.00015	0.00016
-3.50	0.00017	0.00017	0.00018	0.00019	0.00019	0.00020	0.00021	0.00022	0.00022	0.00023
-3.40	0.00024	0.00025	0.00026	0.00027	0.00028	0.00029	0.00030	0.00031	0.00033	0.00034
-3.30	0.00035	0.00036	0.00038	0.00039	0.00040	0.00042	0.00043	0.00045	0.00047	0.00048
-3.20	0.00050	0.00052	0.00054	0.00056	0.00058	0.00060	0.00062	0.00064	0.00066	0.00069
-3.10	0.00071	0.00074	0.00076	0.00079	0.00082	0.00085	0.00087	0.00090	0.00094	0.00097
-3.00	0.00100	0.00104	0.00107	0.00111	0.00114	0.00118	0.00122	0.00126	0.00131	0.00135
-2.90	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
-2.80	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
-2.70	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
-2.60	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
-2.50	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
-2.40	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
-2.30	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
-2.20	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
-2.10	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
-2.00	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
-1.90	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
-1.80	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
-1.70	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
-1.60	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
-1.50	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
-1.40	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808
-1.30	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968
-1.20	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1057	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
-1.10	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
-1.00	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
-0.90	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
-0.80	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
-0.70	0.2148	0.2177	0.2207	0.2236	0.2266	0.2297	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
-0.60	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
-0.50	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
-0.40	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
-0.30	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
-0.20	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
-0.10	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
-0.00	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

附表二：卜瓦松分配表

x	$\lambda = E(X)$									
	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0	0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1	0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2	0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3	0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4	0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5	0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6	0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7	0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8	0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9	0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10	0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.825	0.781
14	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917	0.888	0.854
15	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951	0.932	0.907
16	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973	0.960	0.944
17	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986	0.978	0.968
18	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

試題隨卷繳回