

1. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$2xyy' = 3y^2 + x^2 ; y(1) = 2$$

2. 解下列微分方程式：【計分：15分】

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 100e^{-3x} + 18e^{-x}$$

3. (a) 請說明 Convolution 定理的意義。【計分：5分】

- (b) 以 Laplace Transformation 方法求解下列微分方程式：【計分：15分】

$$y'' + 4y = \sin 3x, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

4. 已知一階準線性(Quasi-linear)偏微分方程式為

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = f_1(x) + f_2(y), \quad \text{其中 } a \text{ 與 } b \text{ 為常數。}$$

- (1) 試證此偏微分方程式的特解(particular solution)型式為
- $z_p = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$
- ，且可表示成如下式所示：

$$z_p = \frac{1}{a} \int f_1(x) dx + \frac{1}{b} \int f_2(y) dy, \quad ab \neq 0 \quad \text{【計分：5分】}$$

- (2) 試證上述偏微分方程式的通解(general solution)型式為
- $z(x, y) = f(bx - ay) + z_p$
- 。【計分：5分】

- (3) 試求解
- $\frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - e^y + 1$
- 。【計分：5分】

5. 已知邊界值問題：
- $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \lambda y = 0$
- ，
- $y(0) = 0$
- ，
- $y'(0) = 0$
- ，
- $y(1) = 0$
- ，
- $y'(1) = 0$
- 。若僅考慮

$\lambda = \alpha^4$ ， $\alpha > 0$ 的情況，試求此邊界值問題的固有值(eigenvalues)與固有函數(eigenfunctions)。【計分：15分】

6. 已知
- $Y(\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2}$
- ，試求其反傅立葉轉換(Inverse Fourier transform)。
- $\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = ?$
-
- 【計分：10分】

7. 已知某一磁通量密度向量為

$$\mathbf{B} = [\sin(y+2z)\cos(y-2z)]\mathbf{i} + [\sin(z+2x)\cos(z-2x)]\mathbf{j} + [\sin(x+2y)\cos(x-2y)]\mathbf{k}$$

又知 R 為 xy -平面上由 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $x+2y=2\pi$ 三條直線所包圍的區域，試求通過區域 R 的磁通量為何？【計分：10分】

試題隨卷繳回