- 請依序於考試答案紙上回答以下所有問題並清楚標示題號
- 請務必詳列解題過程
- 各題估分比重標示於[ ]內
- 請勿使用任何參考工具書
- 請勿使用任何計算機

向量與矩陣[25%]

1. 考慮由原點(origin)至空間中三個點 $P(-2,2,-3)$、$Q(2,1,-6)$、$R(-1,-2,t)$ 所構成之三個向量及以此三個向量為列向量(row vectors)所組成之矩陣 $\mathbf{A}$。請回答以下問題：
   (a) 若此三個向量所決定的平行六面體(parallelepiped)之體積為 45，請求 t。**[4%]**
   (b) 請說明此三個向量的線性相關性(linear dependence)。**[2%]**
   (c) 請求 $\mathbf{A}$ 的轉置矩陣(transposition)的秩(rank)。**[2%]**
   (d) 若線性系統(linear system) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解(a unique solution)，請說明 $\mathbf{b}$ 是否具有限制。**[2%]**
   (e) 請求 $\mathbf{A}$ 的逆矩陣(inverse)的特徵值(eigenvalues)。**[3%]**
   (f) 請求 $\mathbf{A}$ 的逆矩陣(inverse)的特徵向量(eigenvectors)。**[4%]**
   (g) 若 $\mathbf{R}+\mathbf{S}=\mathbf{A}$ 且 $\mathbf{R}$ 的特徵值皆為實數、$\mathbf{S}$ 的特徵值皆為零，請求矩陣 $\mathbf{R}$ 與 $\mathbf{S}$。**[2%]**
   (h) 若矩陣 $\mathbf{B}$ 與(h)中的 $\mathbf{S}$ 相似(similar)，請求 $\mathbf{B}$ 的跡(trace)。**[2%]**
   (i) 若 $\mathbf{D}$ 為矩陣 $\mathbf{P}$ 轉換至其主軸(principal axes)後的相對應對角矩陣(diagonal matrix)且 $\mathbf{QQ}=\mathbf{D}$，亦即 $\mathbf{Q}$ 為 $\mathbf{D}$ 的平方根，請說明當 $\mathbf{P}$ 的特徵值與特徵向量滿足何等條件時，$\mathbf{Q}$ 為實矩陣(real matrix)。**[4%]**

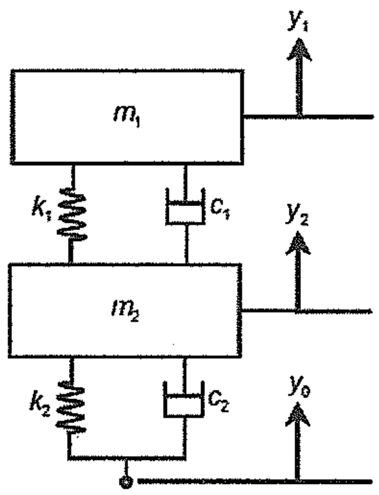
向量分析[25%]

2. 請回答以下線積分(line integrals)、曲面積分(surface integrals)與體積分(volume integrals)相關問題：
   (a) 考慮 $\mathbf{F}=[F_1,\ F_2,\ F_3]$ 及曲線(curve)路徑 C: $\mathbf{r}(t),\ a\le t\le b$，若 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f(\mathbf{r}(b))-f(\mathbf{r}(a))$，請推導 $\mathbf{F}$ 與此純量函數(scalar function) $f=f(x,y,z)$ 可能的關係。**[6%]**
   (b) 請以行列式(determinant)表示法寫出在圓柱座標(cylindrical coordinates)下向量函數 $\mathbf{F}=[F_1,\ F_2,\ F_3]$ 的捲積(curl)，亦即 $\nabla\times\mathbf{F}$。註：圓柱座標系統請以 $\mathbf{r}=r_\rho\boldsymbol{\rho}+r_\theta\boldsymbol{\theta}+r_z\mathbf{z}$ 表示。**[6%]**
   (c) 承(a)與(b)，請計算 $\nabla\times\mathbf{F}$。**[2%]**
   (d) 考慮純量函數 $w=w(x,y)$ 及封閉區域(closed region) R，若假設所有條件皆可滿足的情況下，請由格林定理(Green's theorem in the plane)推導關係式 $\iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy=\oint_{\partial R}\frac{\partial w}{\partial n}ds$，其中 $\mathbf{n}$ 為 R 的邊界 ∂R: $\mathbf{r}(s)$ 的單位法向量(unit normal vector)，亦即 $\mathbf{r}'(s)\cdot\mathbf{n}=0$、$\mathbf{n}$ 為單位長度。**[6%]**
   (e) 請說明(d)中 w 和 R 應具備的條件。**[2%]**
   (f) 請利用散度定理(divergence theorem) $\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV=\iint_{\partial D}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dA$ 說明向量函數 $\mathbf{G}$ 的散度具有座標系統不變性(invariant under change of coordinate systems)。**[3%]**

見背面

常微分方程式[40%]

3. 考慮如下圖所示質量-彈簧-阻尼器(mass-spring-dashpot)系統的運動情形



其中，m 表示質量、k 為彈簧係數、c 為阻尼係數、$y=y(t)$ 為由自然狀態位置起算隨時間 t 變化之位移。若考慮常係數線性彈簧與線性阻尼，亦即彈簧回復力(restoring force)為 $-ky$、阻尼阻力(damping force)為 $-cy'$，請回答以下問題：

(a) 假設 $y_0=y_0(t)$ 為已知，請利用力平衡(force balance)推導 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 的微分方程式(differential equations)。**[8%]**

(b) 請將(a)的結果轉化成一階常微分方程組(a system of first-order ODEs)並以向量型態(vector form)表示。**[4%]**

(c) 請利用一階常微分方程組的方法求取 $4y''+8y'+3y=0$ 、 $y=y(t)$ 的通解(general solution)。**[8%]**

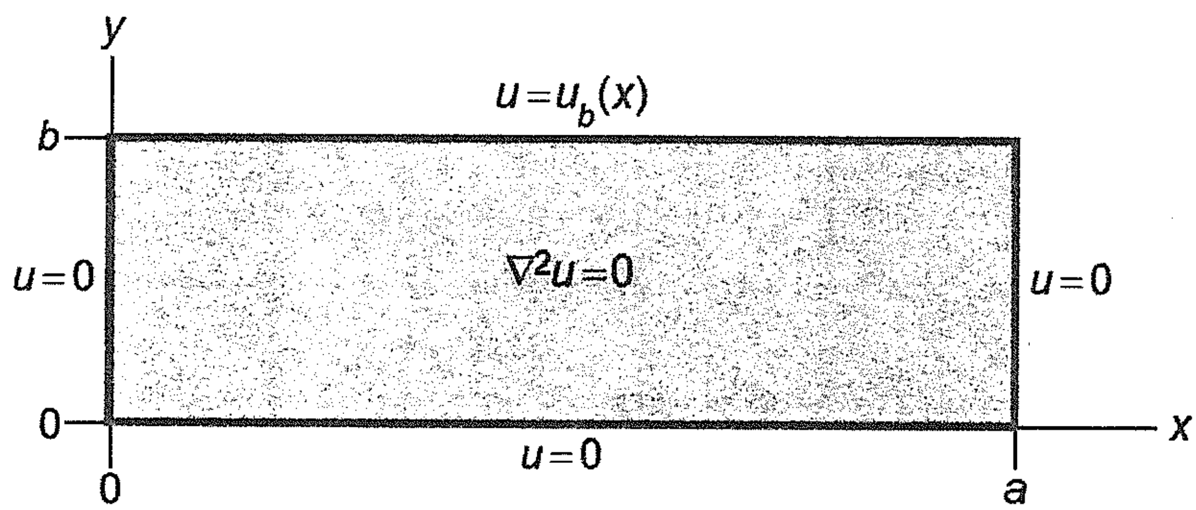
(d) 若 $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$ 為 $y=y(t)$ 的拉式轉換(Laplace transform)，請以此積分轉換法求解常係數初始值問題(initial value problem)：$my''+cy'+ky=F(t)$ 、 $y(0)=0$ 、 $y'(0)=1$ 、 $c=2\sqrt{mk}$ 、 $F=0$ 。**[8%]**

(e) 一函數 $f(x)$ 的傅氏級數(Fourier series)可寫為 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ，且其係數可用三角函數系統的正交性(orthogonality of the trigonometric system)推求。若已知函數 $F=F(t)$ 為周期 $2T$ 的偶函數(even function)，請寫出 $F(t)$ 的傅氏級數係數和 a_n+b_n 。**[6%]**

(f) 請以任意方法求取非齊次(nonhomogeneous)方程式 $4y''+8y'+3y=65\cos t$ 的特解(particular function)。**[6%]**

偏微分方程式[10%]

4. 考慮如下的二維邊界值問題



請回答以下問題：

(a) 請以分離變數法(method of separation of variables)，亦即令 $u(x,y)=F(x)G(y)$ ，求取 x 方向的解 $F(x)$ 。**[4%]**

(b) 承(a)，若 $u_b(x)=\sin(2\pi x/a)$ ，請求取 $u(x,y)$ 。**[6%]**

試題隨卷繳回