

題號： 399
科目： 基礎數學(A)
節次： 7

國立臺灣大學 106 學年度碩士班招生考試試題

題號： 399

共 1 頁之第 1 頁

1. [共 25 分] 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，請求以下四小題 (均需寫出計算過程)：

(1) [5 分] 請求出矩陣 A 的行列式值(determinant)。

(2) [10 分] 請求出矩陣 A 的所有的特徵值(eigenvalue)與相對應的特徵向量(eigenvectors)。

(3) [5 分] 請求出 A^{100} 的特徵值與相對應的特徵向量。

(4) [5 分] 請求出 A^{100} 。

2. [10 分] 若起始值設為 2，請說明如何以牛頓法(Newton-Raphson method)來求出 $f(x) = x^3 - 20$ 的根(root)？

3. [共 15 分] 請求出以下三小題的答案，每小題 5 分 (均需寫出計算過程)：

(1) [5 分] 當 x 介於 -1 到 1 時， $y = x^3$ 與 $y = x$ 兩線之間的面積為_____。

(2) [5 分] $\int_1^3 x^3 \ln x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(其中 \ln 代表自然對數)

(3) [5 分] $\int_1^3 3^{(2x-1)} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. [5 分] 若 $y = (s+3)^2$, $s = \sqrt{t-3}$, $t = x^2$ ，請在 $x = -2$ 時計算 dy/dx 。

5. [10 分] 若 $D = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq X^2 + Y^2 \leq 9, X - Y \leq 0\}$ ，請計算 $\iint_D \frac{X^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} dXdY$ 。

6. [10 分] 若一曲線滿足下列方程式 $(X^2 + Y^2)^2 = X^2 - Y^2$ ，請問在此曲線上滿足切線斜率為零的四個點座標為何？

7. [10 分] 已知 $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ 為 \mathbb{R}^3 的基底(basis)，若存在 X 與 Y 兩個 3×3 矩陣，且此兩個矩陣的特徵向量均為 v_1, v_2, v_3 。請證明 $XY = YX$ 。

8. [共 10 分] 若一條曲線滿足 $Y = A + 3^X B$ ，且此曲線通過 $(0, 1), (1, -5), (2, -23)$ 。

(1) [5 分] 請利用矩陣形式寫出 A, B 的三條方程式，並透過矩陣形式計算出 A, B 的數值。

(2) [5 分] 若此曲線最佳解為 $Y = 0$ ，則在 $X = 0, 1, 2$ 時 Y 數值各應為多少？

9. [5 分] 若存在四個都市 A, B, C, D ，都市間人口遷移的比例如下方矩陣所示，請問經過極長的時間後各都市所佔的人口比例各是多少。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & A & B & C & D \\ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.2 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.9 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

試題隨卷繳回