

1. (10分)請找出函數 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ 的極值，包含極大值、極小值。

2. (10分)請證明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$ 不存在。

3. (15分)請求出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ 與 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x}$ 的極限，其中 a 是比 1 大的常數。

4. (15分)考慮函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(1) 請計算 $f'(x)$ 於 $x \neq 0$ 。

(2) 請計算 $f'(x)$ 於 $x = 0$ ，來說明 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 存在。

(3) 請說明為什麼 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 不是連續函數，在 $x \neq 0$ 是連續函數。

5. (10分)假設 $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ，則向量空間 V 之維度(dimension)是多少呢？請說明理由。

6. (10分)假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 的秩(rank)為何？請說明理由。

7. (10分)假設 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一個線性轉換(linear transformation)，且 $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，則 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = ?$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

8. (10分)何謂特徵值(eigenvalue)？特徵值反映了一個方陣(square matrix)的哪些特徵呢？

9. (10分)假設 A 為一個 2×2 的方陣，且其特徵值為 2 與 -1。若此二個特徵值對應的特徵向量(eigenvector)分別為 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^2 = ?$

試題隨卷繳回