國立臺灣大學 102 學年度碩士班招生考試試題

I. 填空題 (每格 2 分，共 50 分，請按空格編號，依序作答。若無適當答案，請填無解。)

■ 若 Z_1，$Z_2 \ldots Z_M \ldots Z_N$ 為彼此獨立的標準常態分配，$Y=\sum_{i=1}^{N} Z_i$，$W=\sum_{i=1}^{N} Z_i^2$，$V=\sum_{i=1}^{M} Z_i^2$，U=W/V。則 Y 期望值為__(1)__，變異數為__(2)__；W 期望值為__(3)__，變異數為__(4)__；U 期望值為__(5)__，變異數為__(6)__。

■ 為了解 A 和 B 兩校學生程度，隨機獨立抽樣 A、B 兩校學生學測成績如下:

A 校學生	75	70	65	62	61	60	58
B 校學生	74	72	70	50	50	50	

虛無假說為 $H_0: \mu_A=\mu_B$。根據樣本，A 校和 B 校平均分數差異為__(7)__，檢定 A、B 樣本變異數差異的 F 檢定值為__(8)__(5%顯著水準的 F 臨界值為 0.23)。根據前述變異數檢定結果，A 校和 B 校平均分數差異檢定的 t 值為__(9)__，在 5%的顯著水準之下，__(10)__(接受或拒絕虛無假說；5%顯著水準的 t 臨界值為 2.2)。

■ X 遵循超幾何分配，$f_x(x=a)=\dfrac{\binom{M}{a}\binom{N}{n-a}}{\binom{M+N}{n}}$。令 Y 為白奴里(Bernoulli)分配，$f_y(y=b)=P^b(1-P)^{1-b}$。我們得知 E(x)=__(11)__。若 g(y)=E[$x|y$]，h(x)=E[$y|x$]，則 E[g(y)]為__(12)__，E[h(x)]為__(13)__。

■ 研究者隨機抽樣 9 個獨立樣本商品檢驗物價波動。同時研究者以單尾 5%顯著水準檢定虛無假說-物價變動(π)等為零: $H_0: \mu_\pi=0$，與對立假說-物價變動(π)大為零 $H_1: \mu_\pi>0$。若樣本平均數為 5，樣本標準差為 9，則檢定的自由度為__(14)__，t 統計量為__(15)__ (單尾 5%顯著水準的 Z 臨界值為 1.86)，統計檢定結果__(16)__(接受或拒絕虛無假說)。

■ u_t 為標準常態分配，t 為時間，範圍由-∞到∞。給定時間序列模型: $x_t= x_{t-1}+u_t$；則 x_t 的分配為__(17)__，x_t 的期望值為__(18)__，變異數為__(19)__。

■ 根據過去 8 年的資料，研究者發現油價和高速公路流量的關係為:

油價(x)	26	27	32	31	30	26	29	32
車流量(y)	30	31	28	25	26	30	31	29

若學者認為兩者有線性關係，並建立下列迴歸模型: $y_t=a+bx_t+e_t$，e_t 為 i.i.d.常態分配。根據該迴歸模型，其最小平方法下的斜率估計係數 $\hat{b}$ 為__(20)__，截距估計係數 $\hat{a}$ 為__(21)__，迴歸判定係數為__(22)__；若將斜率估計係數 $\hat{b}$ 表示為 $\hat{b}=\sum_{i=1}^{8} k_i y_i$，使 k_i 為一非隨機實數，則 $\sum_{i=1}^{8} k_i=$__(23)__，$\sum_{i=1}^{8} k_i x_i=$__(24)__。假使該研究者也估計下列迴歸模型: $x_t=\alpha+\beta y_t+\varepsilon_t$，其判定係數為__(25)__。

II. 問答與計算題 (共 50 分)

1. 設 X 與 Y 為兩個獨立的 $N(0, 1)$與 $N(0, 4)$隨機變數，令 $S=X+Y$，
   (1) 試推導(X, S)之聯合分配(joint pdf)，並說明 X 與 S 是否獨立? (5 分)
   (2) 給 S=3，試寫出條件分配 $X|_{S=3}$，需寫出分配名稱及參數。 (5 分)
   (3) 以此題驗算以下等式成立，即分別計算左右各三項之值帶入檢驗。
   $Var(X)=EVar(X\mid S)+VarE(X\mid S)$ (1+2+2 分)

2. 設 $\{X_i\}_1^n \overset{i.i.d}{\sim} U(0, \theta)$ 為一組來自均勻分配之隨機樣本。
   (1) 試(i)寫出 θ 之參數空間，(ii)並求 θ 之最大概似估計元(MLE), $\hat{\theta}$, (iii)驗證 $\hat{\theta}$ 具有充分性。(10 分)
   (2) (i)計算 θ 之動差估計元(MME), $\hat{\theta}_{MME}$, (ii)試寫出 $\hat{\theta}_{MME}$ 之漸進分配(Asymmetric distribution)。(10 分)

3. 設 $\{X_i\}_1^n \overset{i.i.d}{\sim} P(\lambda)$ 為一組來自卜瓦松分配之隨機樣本，以 α 為顯著水準。

(1) 設 λ 未知，檢定虛無假設 H_0: $\lambda=1$, vs. 對立假設 H_1: $\lambda=2$，試推導一最佳拒絕域(The best critical region)之檢定。 (10 分)

(2) 試說明此檢定具有何種性質? (5 分)