國立臺灣大學101學年度碩士班招生考試試題

一、(20 分，共 4 小題，每小題 5 分)

假設函數 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ($e^{-0.5}=0.6065$)

X	$\Phi(x)^*$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$	$\Delta^3\Phi$
1.0	0.34135			
		} 0.02298		
1.1	0.36433		} -0.00238	
		} 0.02060		} 0.00005
1.2	0.38493		} -0.00233	
		} 0.01827		} 0.00010
1.3	0.40320		} -0.00223	
		} 0.01604		} 0.00014
1.4	0.41924		} -0.00209	
		} 0.01395		
1.5	0.43319			

$^*\Phi(x)=\int_0^x \phi(u)du$

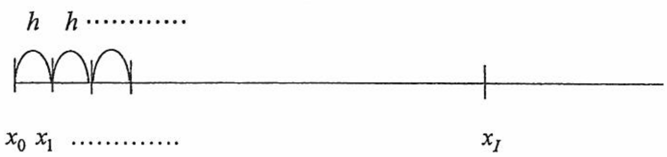
(1) $\phi(1)=$

(A) 0.18 (B) 0.24 (C) 0.34 (D) 0.44

(2) 若 $\phi(x)$ 是以 0 為中心之對稱函數，求 $\phi(x)$ 在 x 為-1 及 1.5 間之面積約為

(A) 0.09 (B) 0.34 (C) 0.43 (D) 0.77

若吾人欲求介於上述所給定 x 之間隔值(如 1.12)，使用 Newton 補間公式進行插補，假設間隔為 h，圖示如下，



$$\Phi_I=(1+\Delta)^I\,\Phi_0$$

此可用二項式定理展開得下式

$$\Phi_I = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{I}{r} \Delta^r \Phi_0$$

若分點間隔 $h = 0.1$ 時，設 $x_0 = 1.0$，$x_I = 1.12$，

(3) 上述二項式展開第二項之值為

(A) 0.018 (B) 0.028 (C) 0.038 (D) 以上皆非

(4) 經插補後，依上述二項式展開至第四項$\Phi(1.12)=0.36\square$，此空格表示小數點後之第 3 及第 4 位，其值為

(A) 66 (B) 76 (C) 86 (D) 96

二、(20 分，共 4 小題，每小題 5 分)

AIDS 發生時間函數為 $A(t)$，而 $A(t)$和 $J(t)$及 $F(t)$兩函數有相關，其中 $J(t)$代表 HIV 感染機率密度函數(Probability density function, PDF)，$F(t)$代表由 HIV 感染後至 AIDS 發生之累積分配函數(Cumulative Distribution Function, CDF)。假設 AIDS 的發生必先由正常人經 HIV 感染，再進展至 AIDS。在 T 時間內 $A(T)$表示為

$$A(T) = \int_0^T J(s) F(T-s)\, ds,$$

在 T 時間內，感染 HIV 但未得 AIDS 之機率為

$$I(T) = \int_0^T J(s) S(T-s)\, ds$$

其中 $S(t) = 1 - F(t)$。

若 J 和 f(F 函數之導函數 $dF(t)$) 均遵循指數分佈

$$J(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, \qquad f(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \qquad (e=2.71828)$$

國立臺灣大學101學年度碩士班招生考試試題

(1) 若 $I(T)$表示為 $I(t=T)=K\times\left(e^{-\lambda_2 T}-e^{-\lambda_1 T}\right)$，則 K=

(A)$\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda_2}$ (B)$\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1-\lambda_2}$ (C)$\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ (D)以上皆非

(2) 若λ_2>>λ_1，且λ_1很小時，運用馬克勞林級數(Maclaurin)展開，且假設 2 次(Second order)以上可忽略，$I(T)\cong K\times\left(e^{-\lambda_2 T}-(\mathrm{U})\right)$，則 U =

(A) $\lambda_1 T$ (B) $1-\lambda_1 T$ (C) $\lambda_1^2 T$ (D) 以上皆非

(3) 若 A(t=T)表示 1-M 則 M=

(A)$\dfrac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}-\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1-\lambda_2}$ (B)$\dfrac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 T}-\lambda_1 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1-\lambda_2}$

(C)$\dfrac{\lambda_1^2 e^{-\lambda_2 T}-\lambda_2^2 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1-\lambda_2}$ (D)$\dfrac{\lambda_2^2 e^{-\lambda_2 T}-\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1-\lambda_2}$

(4) 假設λ_1=0.0001，λ_2=0.1，T(=10) 的時間之內得 AIDS 之機率 $A(t=10)$ 表示為 B× 10^{-4}，B(四捨五入後)=

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 以上皆非

三、(40 分，共 7 小題)

考慮一線性迴歸模式 $Y=X\beta+\varepsilon$，其中 $Y=(Y_1,\dots,Y_n)^{\mathrm{T}}$ 為 $n\times 1$ 的反應變數向量(response vector)，$X=(X_1,\dots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 為 $n\times(p+1)$ 的解釋變數矩陣(covariate matrix)，$X_i=\left(1,X_{i1},\dots,X_{ip}\right)^{\mathrm{T}}$ 為 $(p+1)\times 1$ 的向量，$\beta=\left(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p\right)^{\mathrm{T}}$為 $(p+1)\times 1$ 的參數向量(parameter vector)，ε 為 $n\times 1$ 的誤差向量(error vector)。定義 I_n 為 $n\times n$ 的單位矩陣(identity matrix)，1_n 為

見背面

$n\times 1$ 的 1 向量(每一個元素都是 1)。假設 $n\geq p+1$。

(1)最小平方估計(least squares estimate，簡稱為 LSE)利用 $\operatorname{argmin}_{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_{i1}-\cdots-\beta_pX_{ip}\right)^2$來估計 β。請驗證 LSE 可以表示為 $\hat{\beta}=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y$。(5 分)

(2)利用 LSE 所得到的 Y 的估計值為 $\hat{Y}=\left(\hat{Y}_1,\ldots,\hat{Y}_n\right)^T=X\hat{\beta}=HY$，其中 $H=X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}$。請驗證 H 為一個投影矩陣(projection matrix)。(3 分)

(3)定義 $SST=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$，$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$，$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2$，其中 $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$。請驗證以下三個表達式：$SST=Y^{\mathrm{T}}\left(I_n-\frac{1}{n}1_n1_n^T\right)Y$，$SSR=Y^{\mathrm{T}}\left(H-\frac{1}{n}1_n1_n^T\right)Y$，$SSE=Y^{\mathrm{T}}(I_n-H)Y$。(9 分)

(4)請驗證上題中三個矩陣 $\left(I_n-\frac{1}{n}1_n1_n^T\right)$，$\left(H-\frac{1}{n}1_n1_n^T\right)$，$(I_n-H)$ 都是投影矩陣(projection matrix)。(6 分)

(5)承上題，其秩(rank)各是多少？(6 分)

(6)定義 $\bar{\hat{Y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i$。請驗證 $\bar{\hat{Y}}=\bar{Y}$。(3 分)

(7)$R^2=\frac{SSR}{SST}$ 常用來判斷迴歸模式的解釋能力。請驗證

$$R^2=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(\hat{Y}_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}}\right\}^2$$

。也就是說，Y_i 和 $\hat{Y}_i$ 的樣本相關係數的平方就等於 R^2。(8 分)

接次頁

四、(20 分，共 4 小題)

考慮兩個函數定義如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2, & 2\le x<3\\ 2, & x\ge 3\end{cases} \quad \text{且} \quad g(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x, & 1\le x<2\\ 2x, & 2\le x<3\\ 2x, & x\ge 3\end{cases}$$

請回答下列問題：

(1) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot de^{-f(x)}=?$ (5 分)

(2) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-f(x)}dx=?$ (5 分)

(3) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot de^{-g(x)}=?$ (5 分)

(4) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-g(x)}dx=?$ (5 分)