國立臺灣大學101學年度碩士班招生考試試題

※ 注意：請於試卷內之「非選擇題作答區」作答，並應註明作答之題號。

I、 填空題（每格 2 分，共 50 分。請按<u>空格編號</u>，依序作答。若沒有適當答案，請填寫<u>無解</u>。）

◆ 1 個外觀不易分辨的次級品混在 4 個特級品中販售，若隨機購買 2 個，令所含特級品的個數為隨機變數 X，則 X 分配的重要表徵數為：期望值 $E(X)=$ __(1)__，變異數 $Var(X)=$ __(2)__，動差法的偏態係數 $\beta_1=$ __(3)__，峰態係數 $\beta_2=$ __(4)__ <3 而知 X 分配的峰態為低闊峰。

◆ 欲採用摺刀法(Jackknife Procedure)進行量母體標準差 σ 的推論，乃隨機抽取樣本大小 $n=13$ 之樣本，求得虛擬數值(Pseudovalue) J_i 的平均數 $\bar{J}$、變異數 S_J^2 分別為：

$$\bar{J}=\sum_{i=1}^{n} J_i/n=\sum_{i=1}^{13} J_i/13$$

$$S_J^2=\sum_{i=1}^{n}\left(J_i-\bar{J}\right)^2/(n-1)=\sum_{i=1}^{13}\left(J_i-\bar{J}\right)^2/12$$

由 $\bar{J}$ 推論 σ 時，所採有關之抽樣分配的一至四級主動差 μ_i 分別為：$\mu_1=$ __(5)__，$\mu_2=$ __(6)__，$\mu_3=$ __(7)__，$\mu_4=$ __(8)__。

◆ 依據變異數分析或迴歸分析對已解釋變異(Explained Variation)SSR、總變異(Total Variation)SST 所下的定義，求算下列各題無母統計分析方法的 SST，請以 k、n 等符號表示之。

- ■ Kruskal-Wallis 檢定法：k 組獨立樣本之樣本大小各為 n_i，令樣本大小之和為 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$，檢定統計量可為 $H=(n-1)SSR/SST$，則總變異 SST = __(9)__。
- ■ Friedman 檢定法：k 組有關樣本，集區數為 n，檢定統計量可為 $\chi_r^2=n(k-1)SSR/SST$，則總變異 SST = __(10)__。
- ■ Kendall 的 W 檢定法：k 為項目的組數，n 為樣本大小，檢定統計量可為 $W=SSR/SST$，則總變異 SST = __(11)__。

◆ 為探討 A、B 兩種不同促銷方式對營收的影響，乃隨機抽出同一財團的 60 家超商，進行完全隨機實驗設計，得採用 A、B 兩種不同方式促銷之各 30 家超商的營收由小而大依序為：(顯著水準 $\alpha=0.05$)

A B A B A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A B

則採 A、B 不同促銷方式之超商營收分配的中位數 η_A、η_B 是否相等？

- ■ 依 Mann-Whitney-Wilcoxon 檢定法，可求得檢定統計量 Z = __(12)__ 與臨界值 $-Z_{(0.025)}=-1.96$ 作比較，而對虛無假設 $H_0:\eta_A=\eta_B$ 下結論。
- ■ 依 Kruskal-Wallis 檢定法，可求得檢定統計量 H = __(13)__ 與臨界值 __(14)__ 作比較，亦有相同結論。
- ■ 依 Wald-Wolfowitz 連檢定法，可得檢定統計量(連數) u = __(15)__ 與臨界值作比較，而對 $H_0:\eta_A=\eta_B$ 下結論： __(16)__ (拒絕或不拒絕) H_0。
- ■ 將資料分成 2*2 的聯立表而進行中位數檢定，依 Fisher Exact Test 以檢定統計量 b = __(17)__ 與臨界值 6 作比較而可下結論。
- ■ 將樣本資料按四分位數 Q_1、Q_2、Q_3 分成四組而進行齊一性檢定：
  - ● 依卡方檢定法，可求得檢定統計量 $\chi^2=$ __(18)__ 與臨界值作比較而下結論。此卡方檢定所需的自由度 v = __(19)__。
  - ● 依 Kolmogorov-Smirnov 兩樣本檢定法，可求得檢定統計量 D = __(20)__ 與臨界值作比較而下結論。

◆ 欲探究 A、B 兩種不同包裝對商品銷售量的影響，乃由自願參與的商家中，隨機抽出 20 家，進行集區實驗設計，得各商家一週的銷售量分別：A 為 X_i，B 為 Y_i，$i=1,2,\cdots,20$。假設此資料適合有母數統計分析的條件，經 Microsoft Excel 求得下列部份電腦報表：(顯著水準 $\alpha=0.05$)

包裝	A	B
平均數	$\overline{X}=328.8000$	$\overline{Y}=294.7000$
變異數	$S^2(X)=3139.4316$	$S^2(Y)=3340.3263$
皮耳森相關係數	$r=0.8396$	

- 已知皮耳森(Pearson)相關係數 $r=0.8396$，若統計假設建立為：虛無假設 H_0：兩包裝的銷售量無關、對立假設 H_1：兩包裝的銷售量有關，則可求得檢定統計量 $t=$ ___(21)___ 與臨界值 2.101 作比較，結論： ___(22)___ H_0。此 t 檢定的自由度 $v=$ ___(23)___ 。
- 由相關係數 r 可求得因變數 Y 對自變數 X 的樣本迴歸係數 $b_1=$ ___(24)___ ，進一步求得母數迴歸係數 β_1 的檢定統計量 $F=$ ___(25)___ 與臨界值作比較，而對 $H_0:\beta_1=0$ 下結論。

II、問答與計算題（每小題5分，共50分。）

1. 設 (X,Y) 為二元隨機變數，其聯合機率密度函數為：

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} ce^{-4y} & 0\le x\le y \\ 0 & \text{其他範圍} \end{cases}$$

(1) 試求 c 使 $f_{X,Y}(\cdot)$ 為一良好定義之機率密度函數（pdf）。

(2) 若令 $X=1$，計算 $Y|X=1$ 之條件 pdf，並註明分配名稱及參數。

(3) 計算條件期望值 $E(Y|X=1)$ 及條件變異數 $Var(Y|X=1)$。

(4) 若令 $Y=3$，計算 $X|Y=3$ 之條件 pdf，並計算條件期望值 $E(X|Y=3)$，與驗證此等式 $E(X)=E(E(X|Y))$ 成立。

2. 設 X 與 Y 為獨立同態(i.i.d.)之常態 $N(\mu,\sigma^2)$ 隨機變數，令 $S=X+Y$，$T=X-Y$，

(1) 以動差母函數法(mgf)分別求 S 與 T 之邊際分配，需分別註明其分配名稱及參數。

(2) 試分別計算 $Cov(S,T)$ 及 $Cov(Y,T)$，並說明 $\{S,T\}$,$\{Y,T\}$ 何者為無相關或獨立？

3. 令 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 為一組來自幾何 Geo(p) 分配之隨機樣本，其機率質點函數形式為：

$$P_X(x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=1,2,\cdots \\ 0 & \text{其他範圍} \end{cases}$$

(1) 令 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，試推導 Y_n 之分配，需註明分配名稱及參數。

(2) 若樣本大小 n 很大 $(n>30)$ 且固定，試寫出 Y_n 之漸近分配（Asymptotic Distribution）名稱及參數。

(3) 令參數 $\theta=E(X_i)$，試分別求 θ 之動差估計元(MME)，記為 $\hat{\theta}_{MME}$，及最大概似估計元(MLE)，記為 $\hat{\theta}_{MLE}$。

(4) 若樣本大小 n 很大 $(n>30)$ 且固定，試求 $\hat{\theta}_{MLE}$ 之漸近分配名稱及參數。

試題隨卷繳回